Literatura:

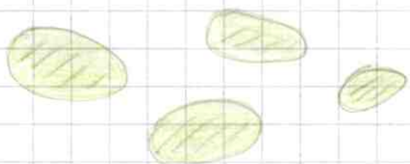
- Klavžar, Imrich: Product Graphs
- Klavžar, Imrich, Rall: Topics in Graph Theory
- Van Lint, Wilson: A Course in Combinatorics
- Biggs: Discrete Mathematics

ALGORITMI V METRIČNI TEORIJI GRAFOV

1. OSNOVNI POJMI METRIČNE TEORIJE GRAFOV

Def.: Naj bo $G = (V(G), E(G))$ graf in $u, v \in V(G)$.
Tedaj je **razdalja med u in v**, $d_G(u,v)$, število povezav na neki najkrajši poti (u,v-poti) med u in v v G. Če take poti ni, postavimo $d_G(u,v) = \infty$.

Opomba: d je končna $\Leftrightarrow$ G povezan graf.



... povezane komponente (ekvivalenčni razredi)

V nadaljevanju bodo grafi, če ne povemo drugače, povezani.

Trditev: Naj bo G graf in d_G razdalja v G. Tedaj je $(V(G), d_G)$ metrični prostor. (utemelji)

$$d_G : V(G) \times V(G) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$$

Opomba: Metriko lahko definiramo tudi na omrežjih[1].
Tudi če bi vzeli najdaljše poti, bi bila to metrika.

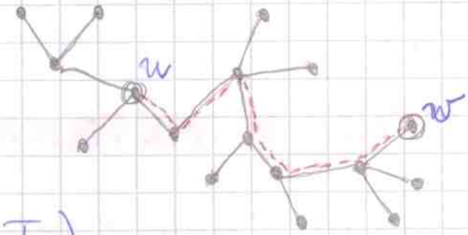
[1] omrežje je graf z uteženimi povezavami

Def. *Interval*, $I_G(u,v)$, med vozliščema u in v grafa G, je definirana takole:

$$I_G(u,v) = \{w \mid d(u,v) = d(u,w) + d(w,v)\}.$$

(to so tiste točke, ki ležijo na kaki najkrajši (u,v)-poti)

Primeri 1. T drevo, $u,v \in V(T)$.



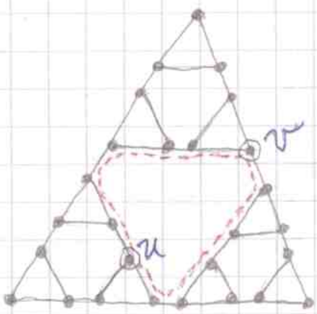
(T drevo $\Leftrightarrow$ $\forall$ par u,v $\exists!$ u,v-pot v T)

$I(u,v)$ je množica vozlišč na u,v-poti.

2. K_n: $\binom{n}{2}$ ~~vozlišč~~ povezav $\quad I(u,v) = \{u,v\}$

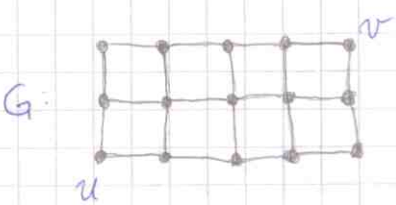
Opomba:
- $u,v \in I(u,v)$
- $u \neq v$: $I(u,v) = \{u,v\} \Leftrightarrow d(u,v) = 1$

3.



Vsa vozlišča na "notranjem ciklu" so $I(u,v)$.

4.



$I(u,v) = V(G)$

V splošnem: $\{u,v\} \subseteq I(u,v) \subseteq V(G)$.

Def. *Polmer* grafa G, $rad(G)$, je

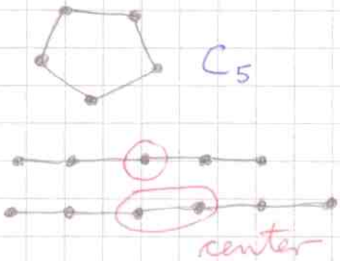
$$rad(G) = \min_{u \in V(G)} \max_{v \in V(G)} d(u,v).$$

Center grafa G, $C(G)$, je množica vozlišč, ki realizirajo polmer. (to so tiste točke, ki so najbolj "v sredini" grafa)

Primeri: $\mathrm{rad}(K_n) = 1$

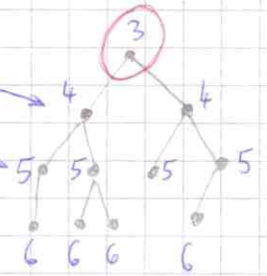
$\mathrm{rad}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

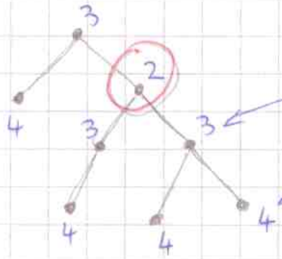
$\mathrm{rad}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



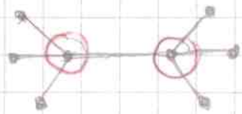
Naloga. Kaj je center drevesa?

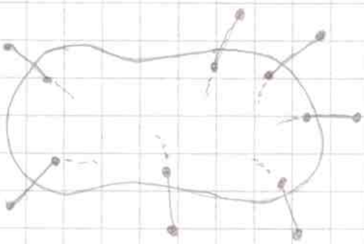
številke pomenijo razdaljo do najbolj oddaljenega vozlišča





dolžina poti do najbolj oddaljenega vozlišča





Center je bodisi ena točka, bodisi povezava.

(algoritem: rezanje listov)

Def. **Premer** grafa G, $\mathrm{diam}(G)$, je

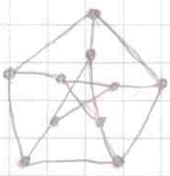
$$\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} d(u,v).$$

Primeri. $\mathrm{diam}(K_n) = 1$

$\mathrm{diam}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$\mathrm{diam}(P_n) = n-1$

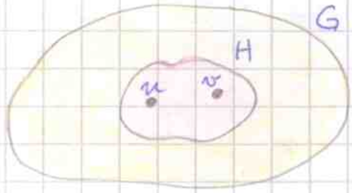
P ... Petersenov graf $\qquad \mathrm{diam}(P) = 2$



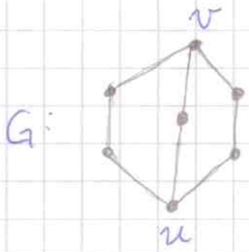
V K_n in C_n je $C(G) = V(G)$ (center), tj. $C(K_n) = V(K_n)$, ...

IZOMETRIČNI PODGRAFI

H podgraf grafa G



$$d_H(u,v) \geq d_G(u,v)$$



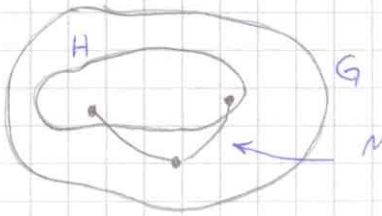
$H \cong C_6$

$d_H(u,v) = 3$

$d_G(u,v) = 2$

Def. Podgraf H grafa G je *izometrični podgraf*, če za vsaki vozlišči $u, v \in V(H)$ velja:

$$d_H(u,v) = d_G(u,v).$$

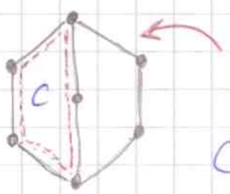


ni bližnjice, ki gre izven H

Trditev. Naj bo C najkrajši cikel ali najkrajši lihi cikel grafa G. Tedaj je C izometrični podgraf grafa G.

"najkrajši lihi cikel" = cikel, ki je najkrajši v množici vseh lihih ciklov

"najkrajši cikel" = najkrajši cikel med vsemi podgrafi

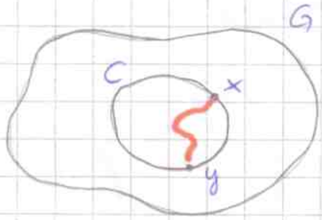


C_6 je najkrajši sodi cikel

$C = C_5$ je najkrajši lihi cikel

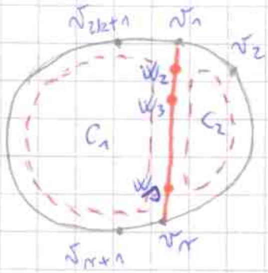
Note. Grafi brez lihih ciklov so natanko dvodelni grafi.

Dokaz. Naj bo $C = v_1 v_2 \dots v_{2m+1}$ najkrajši lihi cikel v G. Recimo, da C ni izometričen. Potem obstajata dve taki vozlišči x, y na C: $d_G(x,y) < d_C(x,y)$. Izmed vsemi takimi pari x in y naj bosta vozlišči izbrani tako, da je $d_C(x,y)$ najkrajša.



Potem je bližnjica med x in y v G v notranjosti disjunktna s C.

Potem je bližnjica med x in y v G v notranjosti disjunktna s C. BŠS: $x = v_1$, $y = v_r$, $r \le k$.



$v_1 \to w_2 \to w_3 \to \dots \to w_s \to v_r$

C_1: $v_1 \to w_2 \to \dots \to w_s \to v_r \to v_{r+1} \to \dots \to v_{2k+1} \to v_1$

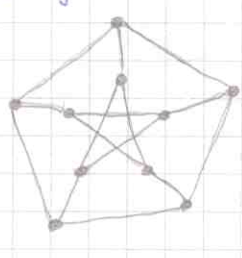
C_2: $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_r \to w_s \to w_{s-1} \to \dots \to w_2 \to v_1$

$|C_1| + |C_2| = 2k + 1 + 2s \Rightarrow |C_1|$ ali $|C_2|$ je liho.

Ker sta oba C_1 in C_2 krajša od C $\rightarrow\leftarrow$.

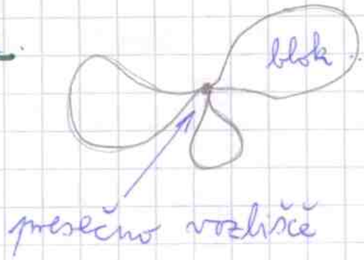
Naj bo sedaj C najkrajši cikel. Če je C lihe dolžine, je dokaz že narejen (zgoraj). Če je C sode dolžine: postopamo kot v prvem primeru. $\square$

Primer. V Petersenovem grafu so vsi 5-cikli izometrični.



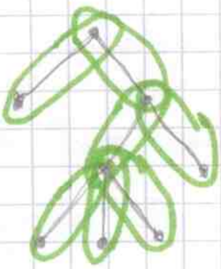
Def. Podgraf H grafa G je **konveksni podgraf**, če za vsak par $u, v \in V(H)$: $I_G(u,v) \subseteq V(H)$.

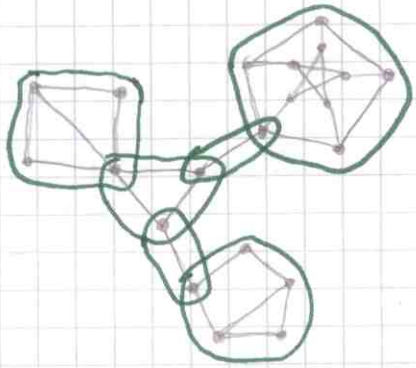
Naloga.



blok ... komponenta brez presečnega vozlišča

Blok je maksimalen 2-povezan podgraf ali K_2.

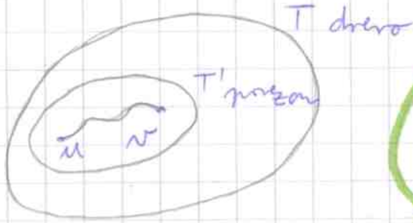


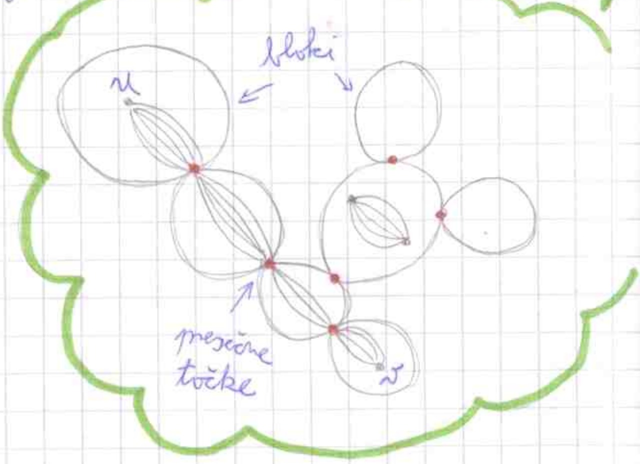


Če vzamemo dve vozlišči v bloku, bo najkrajša pot v tem bloku (če bi šli ven iz bloka, bi šli preko presečne točke in ne bi mogli več nikjer priti nazaj v blok)

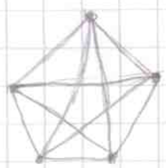
Kaj lahko povemo o konveksnih podgrafih, če poznamo bloke grafa?

Za drevesa velja: brž ko bo podgraf povezan, bo tudi konveksen.





Opomba. G je konveksen v G.
K_2 je konveksen v G.



K_5

vsi polni podgrafi so konveksni oz. vsi inducirani podgrafi

C_4 ... za konveksne podgrafe ima samo K_2 in C_4

Trditev 3.25 iz Vrabca: Če je d' metrika na M' in d'' metrika na M'', lahko definiramo metrike d_p ($1 \leq p \leq \infty$) na $M := M' \times M''$ takole:

$x = (x', x'')$

$$d_p(x,y) := \begin{cases} \left(d'(x',y')^p + d''(x'',y'')^p \right)^{1/p}, & \text{če } p < \infty \\ \max\{ d'(x',y'), d''(x'',y'') \}, & \text{če } p = \infty \end{cases}$$