Končno razsežni vektorski prostori

V v. p. nad $\mathbb{O}$

$M \subseteq V$; M je ogrodje v. p. V, kadar je
$\mathcal{L}in\, M = V$.

M je ogrodje $\iff$ $\forall v \in V$ je lin. kombinacija elem. iz M

$M_1 \subseteq M_2 \subseteq V$, M_1 ogrodje $\Rightarrow$ M_2 je ogrodje
V je ogrodje ... (z eksistenco ni težav)

Lema Naj bo M ogrodje v. p. V in $u \in M$. Če je u linearna kombinacija elementov iz $M \setminus \{u\}$, potem je $M \setminus \{u\}$ ogrodje.

Dokaz $v \in V$ $\quad v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$

$$\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_k}_{\text{različni (smemo predpostaviti)}} \in M$$

1) Če $u \notin \{u_1, \dots, u_k\}$, potem $v \in \mathcal{L}in(M \setminus \{u\})$
2) Če $u \in \{u_1, \dots, u_k\}$, potem:

npr. $u = u_1$

$$v = \alpha_1 \underbrace{(\beta_1 u_1' + \dots + \beta_\ell u_\ell')}_{u} + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$$

$u_1', u_2', \dots, u_\ell' \in M \setminus \{u\}$ $\quad u_2, \dots, u_k \in M \setminus \underset{\underset{u_1}{\shortparallel}}{\{u\}}$;

$\Rightarrow v \in \mathcal{L}in\, M \setminus \{u\}$

Torej je $M \setminus \{u\}$ ogrodje v. p. V.

Vektorski prostor V je končno razsežen, kadar ima kako končno ogrodje.

$v_1, \dots, v_k \in V \qquad (k > 1)$
so linearno odvisni, kadar je vsaj eden od njih linearna kombinacija drugih.
V nasprotnem primeru so linearno neodvisni.

$v_1, \dots, v_k$ so linearno neodvisni natanko takrat, kadar velja sklep:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0 \quad (*)$$

Utemeljitev: $v_1, \dots, v_k$ linearno odvisni

(1) $\qquad v_1 = \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k$

$$0 \neq 1 \cdot v_1 + (-\beta_2) v_2 + \dots + (-\beta_k) v_k = 0 \quad \Rightarrow (*) \text{ ne velja}$$

(2) (v drugo smer)
Recimo, da $(*)$ ne velja:
$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k$, tako da niso vsi enaki 0
in da velja $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$.
Npr. $\alpha_1 \neq 0$. Potem je

$$v_1 = \alpha_1^{-1}(-\alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_k v_k) =$$
$$= -\alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_1^{-1}\alpha_k v_k$$

Torej so $v_1, \dots, v_k$ lin. odvisni.

$k = 1$: v_1

v_1 je linearno neodvisen $\Leftrightarrow$ $\left(\text{velja sklep: } \alpha_1 v_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0\right)$

$v_1 \neq 0$

$v_1 \neq 0 \iff v_1$ je lin. neodvisen

Lema Vektorji $v_1, \dots, v_k \in V$ $(k > 1)$ so linearno odvisni natanko takrat, kadar je vsaj eden linearna kombinacija predhodnikov. (tistih z manjšimi indeksi)

Utem. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ vsaj en $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, k)$

Naj bo i tak, da je
$\alpha_{i+1} = \dots = \alpha_k = 0$ (če $i < k$)
Potem je v_i lin. kombinacija vekt. $v_1, \dots, v_{i-1}$. ■

$v_1, \dots, v_k$ linearno neodvisni $\Rightarrow v_i \neq v_j$ za $i \neq j$

$v_i = v_j$ za kakšen par i, j, $i \neq j$

$1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_j = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_k$ so lin. odvisni

$\{v_1, \dots, v_k\}$ je linearno neodvisna

Def. $\{v_1, \dots, v_k\}$ je baza v. p. V, kadar so $v_1, \dots, v_k$ lin. neodvisni in tvorijo ogrodje v. p. V.

$$\boxed{\text{Minimalno ogrodje netrivialnega v. p. je baza. Netrivialen končno razsežen v. p. ima bazo.}}$$

$$\boxed{\text{Iz vsakega končnega ogrodja netrivialnega v. p. lahko izberemo bazo.}}$$

Utemeljitev Iz ogrodja postopoma z leve proti desni odstranjujemo vektorje, ki so linearne kombinacije predhodnih. Na koncu ostane baza.

$$\underrightarrow{v_1, v_2}, \cancel{v_3}, \dots, v_m \quad (\neq 0)$$

Primer $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ je baza $\Leftrightarrow$ v_1, v_2, v_3 so linearno neodvisni

(1) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ standardna baza

(2) $\mathbb{O}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{O} \ \forall i\}$

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{1}, 0, \dots, 0)$$

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ je standardna baza $\mathbb{O}^n$

$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow E$ je ogrodje

E je lin. neodvisna

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \qquad \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$
$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$$

Naj bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza v. p. V.
Potem za vsak $v \in V$ obstajajo in so enolično določeni $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{O}$, tako da velja

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n .$$

Utemeljitev: Eksistenca skalarjev $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{O}$ ... sledi iz dejstva, da je $\{v_1, \dots, v_n\}$ ogrodje.

Enoličnost:

$$\left.\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \\ v &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$$

$v_1, \dots, v_n$ lin. neodvisni $\Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i \ \forall i$

Velja tudi obrat. (Dokaži sam doma.)

Vsako linearno neodvisno (končno) množico končno razsežnega v.p. lahko dopolnimo do baze.

Utemeljitev: $v_1, \dots, v_k$ lin. neodvisni

Dodamo (na desni) ogrodje (končno).

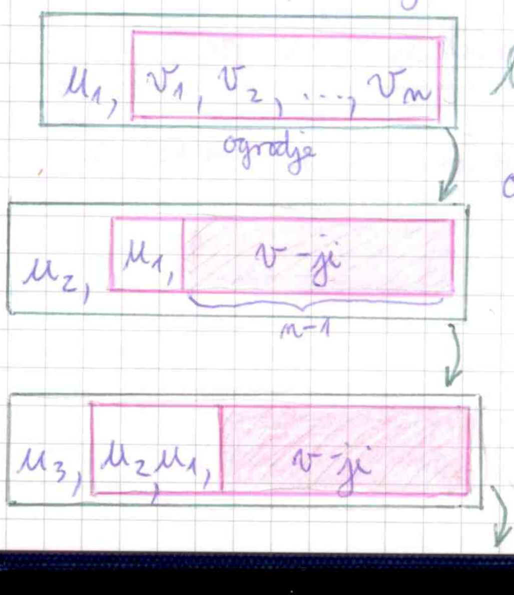
$\{\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_k}_{\text{lin. neodvisni}}, \underbrace{u_1, u_2, \dots, u_m}_{\text{ogrodje}}\}$ je ogrodje

Z leve proti desni postopoma odstranjujemo vektorje, ki so lin. kombinacije predhodnih. Na koncu ostane baza, ki vsebuje $v_1, v_2, \dots, v_k$ (ker so ti vektorji lin. neodvisni!).

Trditev: Naj bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ ogrodje v.p. V, $\{u_1, \dots, u_m\}$ pa linearno neodvisna podmnožica V.

Potem je $m \leq n$.

Dokaz: Recimo, da je $m > n$.



linearno odvisno ogrodje

odstranimo enega od v-jev

ogrodje lin. odv. ogrodje

odstranimo enega od v-jev

ogrodje lin. odv. ogrodje

$\boxed{u_n, u_{n-1}, \dots, u_1}$ ogrodje

$\Downarrow$ $u_{m+1} \in \mathrm{Lin}\{u_1, \dots, u_n\} = V$

To je v protislovju z dejstvom, da so $u_1, \dots, u_m$ linearno neodvisni!

Torej je $m \leq n$. ■

Posledica. Vse baze končno razsežnega v. p. imajo enako elementov.

Dokaz. $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza
$\{u_1, \dots, u_m\}$ baza

ogr. l.n. $\Downarrow$ $m \leq n$ l.n. ogr. $\Downarrow$ $n \leq m$

V končno razsežen v. p.
$\{v_1, \dots, v_n\}$ baza V $n = \dim V$ (dimenzija, razsežnost)

$V = \{0\}$, $\dim V = 0$ $\dim \mathbb{O}^n = n$

Izrek Za končno razsežen (netrivialen) v. p. V velja:
Preslikava $\Psi : \mathbb{O}^n \longrightarrow V$, definirana s predpisom $\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, kjer je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza V, je izomorfizem v. p.

Opomba. Torej je netrivialen n-razsežen v. p. nad $\mathbb{O}$ $(n \in \mathbb{N})$ izomorfen $\mathbb{O}^n$.

Dokaz.
Ψ linearna preslikava (očitno)

Ψ je surjektivna:

$v \in V$ $\qquad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Ψ je injektivna:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \ker \Psi \Rightarrow \underline{0} = \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \underline{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ (lin. neodvisnost!)

$\Rightarrow$ $\ker \Psi$ je trivialno, zato je Ψ injektivna

Opomba: $\Phi = \Psi^{-1} : V \longrightarrow \mathcal{O}^n$

je izomorfizem

$\{v_1, \dots, v_n\}$ baza

$$\Phi(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim V = n \in \mathbb{N} \\ V \text{ v.p. nad } \mathcal{O} \end{array}\right\} \Rightarrow V \text{ izomorfen } \mathcal{O}^n$$

Posledica: Naj bosta V in U v.p. nad $\mathcal{O}$. Če je $\dim V = \dim U < \infty$, potem sta prostora V in U izomorfna.

Dokaz: $\dim V = \dim U = n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists\, \Psi_1 : \mathcal{O}^n \to V$ izomorfizem

$\exists\, \Psi_2 : \mathcal{O}^n \to U$ izomorfizem

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}^n \arrow[dl, "\Psi_1"'] \arrow[dr, "\Psi_2"] & \\ V \arrow[rr, "\Psi"] & & U \end{tikzcd}$$

$\Psi = \Psi_2 \Psi_1^{-1}$ je izomorfizem med V in U

Trditev: Naj bosta V in U med sabo izomorfna končno razsežna v.p. Potem je $\dim V = \dim V$.

Dokaz: V netrivialen; $\Phi : V \to U$ izomorfizem v.p.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ baza V

Potem je $\{\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)\}$ baza U.

(1) lin. neodvisnost:

$$\alpha_1 \Phi(v_1) + \dots + \alpha_n \Phi(v_n) = 0$$

$$\Phi(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

Φ bijekcija $\Rightarrow$ $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

linearna

so lin. neodvisni

$\Rightarrow$ $\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)$ so lin. neodvisni

(2) ogrodje: $u \in U$ poljuben $\exists v \in V : \Phi(v) = u$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad (\{v_1, \dots, v_n\} \text{ je baza } V)$$

$$\Rightarrow u = \Phi(v) = \Phi(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) =$$
$$= \alpha_1 \Phi(v_1) + \dots + \alpha_n \Phi(v_n).$$

(1) & (2) $\Rightarrow$ $\{\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)\}$ je baza U.

$$\dim U = n = \dim V. \quad \blacksquare$$

Izrek Končno razsežna v. p. nad istim obsegom sta izomorfna natanko takrat, kadar imata enako dimenzijo.

$V = V_1 \oplus V_2$ $\quad V_1, V_2$ netrivialna

$\{v_1, \dots, v_k\}$ baza V_1 $\Rightarrow$ $\dim V_1 = k$

$\{v_{k+1}, \dots, v_{k+l}\}$ baza V_2 $\Rightarrow$ $\dim V_2 = l$

$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}\}$ je baza V

(1) lin. neodvisnost:

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k}_{\in V_1} + \underbrace{\alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_{k+l} v_{k+l}}_{\in V_2} = 0$$

$$\underset{V_1}{\underset{\cap}{x}} + \underset{V_2}{\underset{\cap}{y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{V_1 \oplus V_2}{x = y = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 & \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0 \\ \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_{k+l} v_{k+l} = 0 & \Rightarrow \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_{k+l} = 0 \end{cases}$$

(2) ogrodje:

$v \in V$ polj. $\quad V = V_1 \oplus V_2$

$$\Rightarrow \quad v = x + y \quad , \quad x \in V_1, \ y \in V_2$$

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \qquad y = \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_{k+l} v_{k+l}$$

$$\Rightarrow \quad v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k+l} v_{k+l}$$

(1) & (2) $\Rightarrow$ $\{v_1, \ldots, v_{k+l}\}$ je baza V

Torej je dimenzija v.p. V enaka $k+l$. $\dim V = k + l$.

Izrek: Naj bo V končno razsežen v.p. in naj velja $V = V_1 \oplus V_2$. Potem je $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$

Opomba: $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

V_1, V_2 – podprostora v. p. V

Eksistenca direktnega komplementa

Trditev Naj bo V končno razsežen v.p. in V_1 njegov podprostor. Potem obstaja tak podprostor $V_2 \subseteq V$, da je $V = V_1 \oplus V_2$. (V_2 - direktni komplement prostora V_1)

Dokaz V_1, V_2 netrivialna (sicer očitno)
($\Leftarrow\Rightarrow$ V_1 netrivialen in $V_1 \neq V$)

$\{v_1, \dots, v_k\}$ baza V_1; dopolnimo jo do baze $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}\}$ prostora V.

Naj bo $V_2 = \mathcal{L}in\{v_{k+1}, \dots, v_{k+l}\}$.

Trdimo, da je $V = V_1 \oplus V_2$.

(1) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$:

$v \in V_1 \cap V_2 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \\ v = \beta_1 v_{k+1} + \dots + \beta_l v_{k+l} \end{array}\right\}$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + (-\beta_1) v_{k+1} + \dots + (-\beta_l) v_{k+l} = 0$$

lin. neodvisni

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_l = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$

(2) $V = V_1 + V_2$:

$v \in V \qquad v = \underbrace{\gamma_1 v_1 + \dots \gamma_k v_k}_{\in V_1} + \underbrace{\gamma_{k+1} v_{k+1} + \dots + \gamma_{k+l} v_{k+l}}_{\in V_2}.$

Izrek: Naj bosta V, U končno razsežna v.p. nad $\mathbb{O}$ in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$. Potem sta v.p. $V/\ker \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}$ izomorfna.

množica linearnih preslikav

Dokaz: (že vemo)

Posledica: $\dim(\operatorname{im} \mathcal{A}) = \dim(V/\ker \mathcal{A})$

Posledica: Naj bo V končno razsežen v.p. in $V = V_1 \oplus V_2$. Potem je V_1 izomorfen V/V_2 in V_2 je izomorfen V/V_1. Zato je $\dim V/V_i = \dim V - \dim V_i$, $i = 1,2$.

projekcija na V_1 vzdolž V_2

Dokaz: $\forall v \in V \ \exists! v_1 \in V_1$ in $\exists! v_2 \in V_2 : v = v_1 + v_2$

obstaja natanko eden

$P_1 : V \to V \ ; \ P_1 v = v_1$
$P_2 : V \to V \ ; \ P_2 v = v_2$

$P_i : V \to V \ ; \ P_i v = v_i \ ; \ i = 1,2$

Dokaži doma.

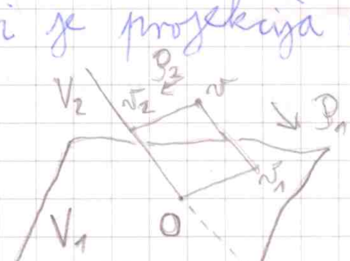
P_1, P_2 sta linearni preslikavi $(P_i \in \mathcal{L}(V) ; \ i = 1,2)$

$\operatorname{im} P_1 = V_1$
$\operatorname{im} P_2 = V_2$

lahko pišemo

$\operatorname{im} P_i = V_i \ ; \ i = 1,2$

P_i je projekcija (projektor) na podprostor V_i.



P_1 vzdolž V_2 $\quad$ P_2 vzdolž V_1

Velja tudi $\ker P_1 = V_2$ in $\ker P_2 = V_1$.

$$\underset{v_1+v_2}{\underset{\parallel}{v}} \in \ker P_1 \iff \underset{v_1}{\underset{\parallel}{P_1 v}} = 0 \implies v = v_2 \in V_2.$$

Po izreku je potem $V/V_1 = V/\ker \mathcal{P}_2$ izomorfen $\operatorname{im}\mathcal{P}_2 = V_2$.

V/V_2 ... -||- ... V_1.

Vemo, da je $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

V/V_1 izom. $V_2 \Rightarrow \dim V/V_1 = \dim V_2$

$\Rightarrow \dim V/V_1 = \dim V - \dim V_1$.

Izrek Naj bosta V, U končno razsežna v.p. in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,U)$. Potem velja $\boxed{\dim(\ker\mathcal{A}) + \dim(\operatorname{im}\mathcal{A}) = \dim V}$. (*)

defekt linearne preslikave

Dokaz: $V/\ker\mathcal{A}$ je izomorfen $\operatorname{im}\mathcal{A}$, zato $\dim(V/\ker\mathcal{A}) = \dim(\operatorname{im}\mathcal{A})$.

Vemo, da je v primeru $V = V_1 \oplus V_2$

$\dim V/V_1 = \dim V - \dim V_1$.

($V_1 \subseteq V \ \exists V_2 : V_1 \oplus V_2 = V$, zato) velja za vsak $V_1 \subseteq V$)

Vzemimo $V_1 = \ker\mathcal{A}$ in dobimo

$\dim(V/\ker\mathcal{A}) = \dim V - \dim(\ker\mathcal{A})$.

Posledica: Naj bo V končno razsežen v.p. in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Potem so ekvivalentne nasl. izjave:

(1) $\mathcal{A}$ je izomorfizem (= avtomorfizem) v.p., oziroma $\mathcal{A}$ je obrnljiva;

(2) $\mathcal{A}$ je injektivna;

(3) $\mathcal{A}$ je surjektivna;

(4) $\dim(\operatorname{im}\mathcal{A}) = \dim V$.

$\quad\;\; \parallel$

$\boxed{\text{rang}\ \mathcal{A}}$ najlažje računati

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, bend left] \arrow[rr, bend left] & (2) \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend right] & (3) \arrow[r, bend left] & (4) \arrow[ll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Dokaz: $(1) \Rightarrow (2), (3)$

$(3) \Rightarrow (4)$: $\mathcal{A}$ surj. $\Rightarrow \operatorname{im}\mathcal{A} = V \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{im}\mathcal{A}) = \dim V$, tj. (4)

Recimo, da velja (4).
Potem iz formule $(*)$ sledi $\dim(\ker\mathcal{A}) = 0$.
Zato je $\ker\mathcal{A} = \{0\}$. Torej je $\mathcal{A}$ injektivna.
Zato velja $(4) \Rightarrow (2)$.

Recimo, da velja (2). Potem je $\ker\mathcal{A} = \{0\}$ in
zato $\dim(\ker\mathcal{A}) = 0$. Po formuli $(*)$ je
$\dim(\operatorname{im}\mathcal{A}) = \dim V$. Zato je $\operatorname{im}\mathcal{A} = V$.
Torej je $\mathcal{A}$ surjektivna, torej bijektivna.
Torej velja $(2) \Rightarrow (3), (1)$.

Iz dokazanih implikacij sledijo ekvivalence:
$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$.