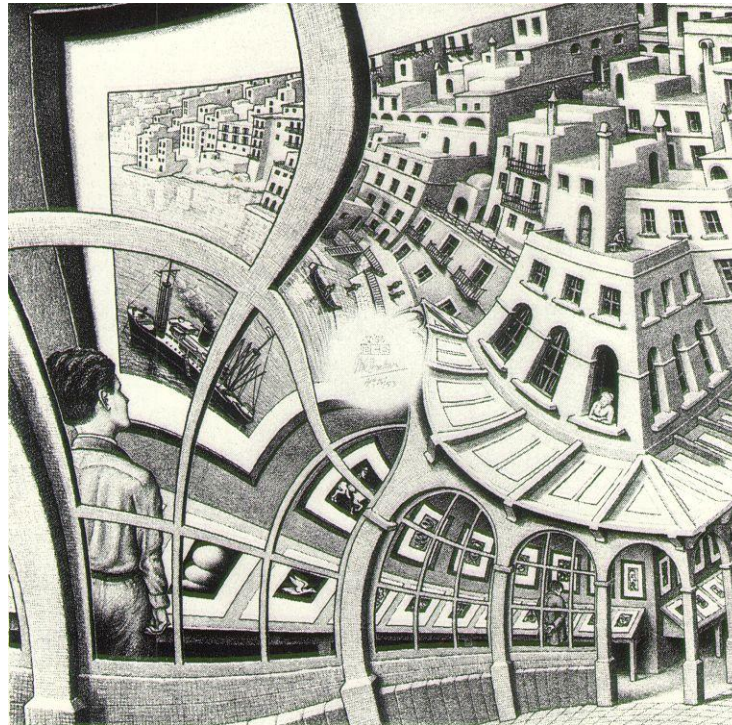


Marko Uršič, Filozofija narave, FF

Neevklidske geometrije ukrivljeni prostori



Evklidska, klasična geometrija

Evklid, *Elementi*, 13 knjig, ~ 325–300 pr. n. š., Aleksandrija

Evklidovih pet postulatov geometrije:

- (1) Če sta A in B dve različni točki, obstaja premica, na kateri ležita obe.
- (2) Vsaka končna prema črta je del ene same neskončne premice.
- (3) Če je A točka in r končna razdalja, obstaja en sam krog s točko A kot središčem in radijem r .
- (4) Vsaka dva prava kota sta enaka.
- (5) Če premica prečka dve premici in pri tem tvori notranja kota na isti strani, katerih vsota je manjša od dveh pravih kotov, potem se bosta ti dve premici, če ju podaljšamo v neskončnost, srečali na tisti strani, na kateri sta kota manjša od dveh pravih kotov.

Iz petega Evklidovega postulata sledi teorem, ki je deduktivno ekvivalenten samemu postulat (torej tudi iz tega teorema sledi peti postulat), ki ga običajno imenujemo:

☺ *Evklidov aksiom o vzporednicah:*

- (5') Skozi dano točko obstaja k dani premici ena in samo ena vzporednica.

Prvo neevklidsko geometrijo je odkril Nikolaj Ivanovič **Lobačevski** (1826).

Lobačevski je zasnoval svojo geometrijo na spremenjenem aksiomu o vzporednici:

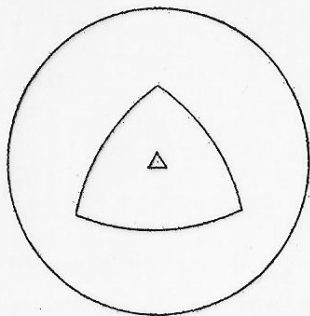
Skozi točko T , ki ne leži na premici p , poteka več kot ena vzporednica k premici p .

(Pozneje se to imenuje “hiperbolična geometrija”).)

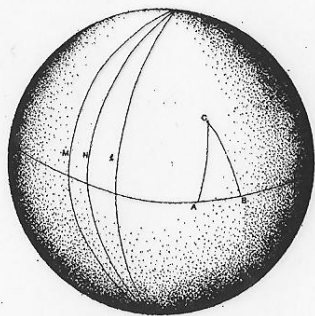
Sferične in hiperbolične neevklidske geometrije

(ponazoritev v dveh dimenzijah)

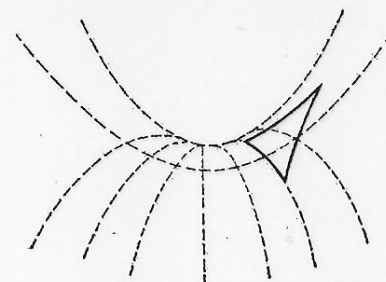
pozitivno ukrivljena (**sferična**) geometrija:
vsota notranjih kotov v trikotniku je večja od 180°



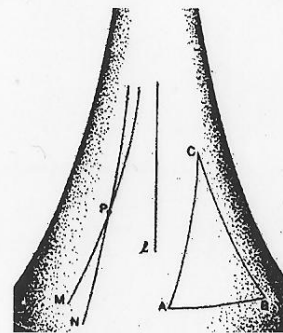
1. varianta zanikanja 5. Evklidovega postulata:
Skozi točko, ki ne leži na izbrani "premici"
(tj. geodetki) k le-tej ne obstaja nobena
vzporednica – saj se vse na **sferi**
"vzporedne" geodetke sekajo na polih:



negativno ukrivljena (**hiperbolična**) geometrija:
vsota notranjih kotov v trikotniku je manjša od 180°



2. varianta zanikanja 5. Evklidovega postulata:
Skozi točko, ki ne leži na izbrani "premici"
(tj. geodetki) k le-tej obstaja neskončno mnogo
vzporednic – saj se vse na **pseudosferi**
"vzporedne" geodetke nikjer ne sekajo:



Pozitivno in negativno ukrivljeni prostor (ponazoritev v 2D)

pozitivna
ukrivljenost
("žoga")

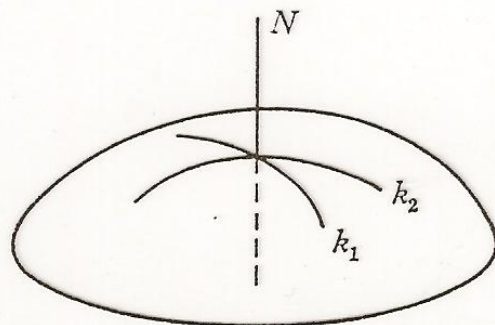


Fig. 3.5.

+N upward, k_1- , k_2- ; $K+$
+N downward, k_1+ , k_2+ ; $K+$

negativna ukrivljenost
("sedlo")

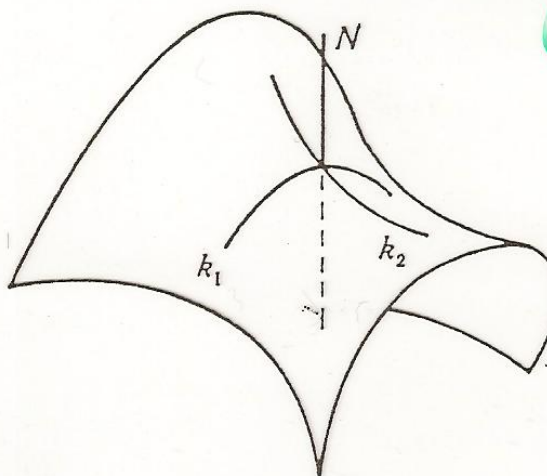


Fig. 3.6.

+N upward, k_1- , k_2+ ; $K-$
+N downward, k_1+ , k_2- ; $K-$

Trikotniki na neevklidskih ploskvah, računanje intrinzične ukrivljenosti prostora (Carl Friedrich **Gauss**, 1777–1855)

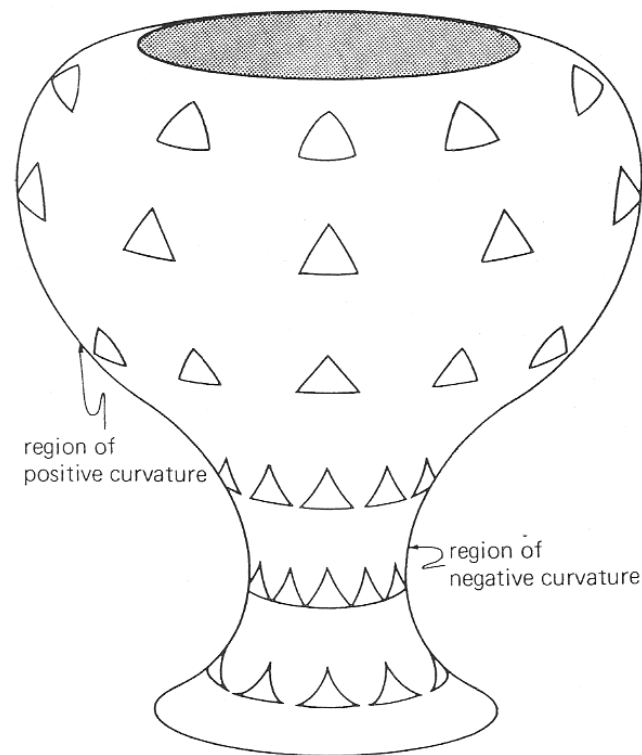
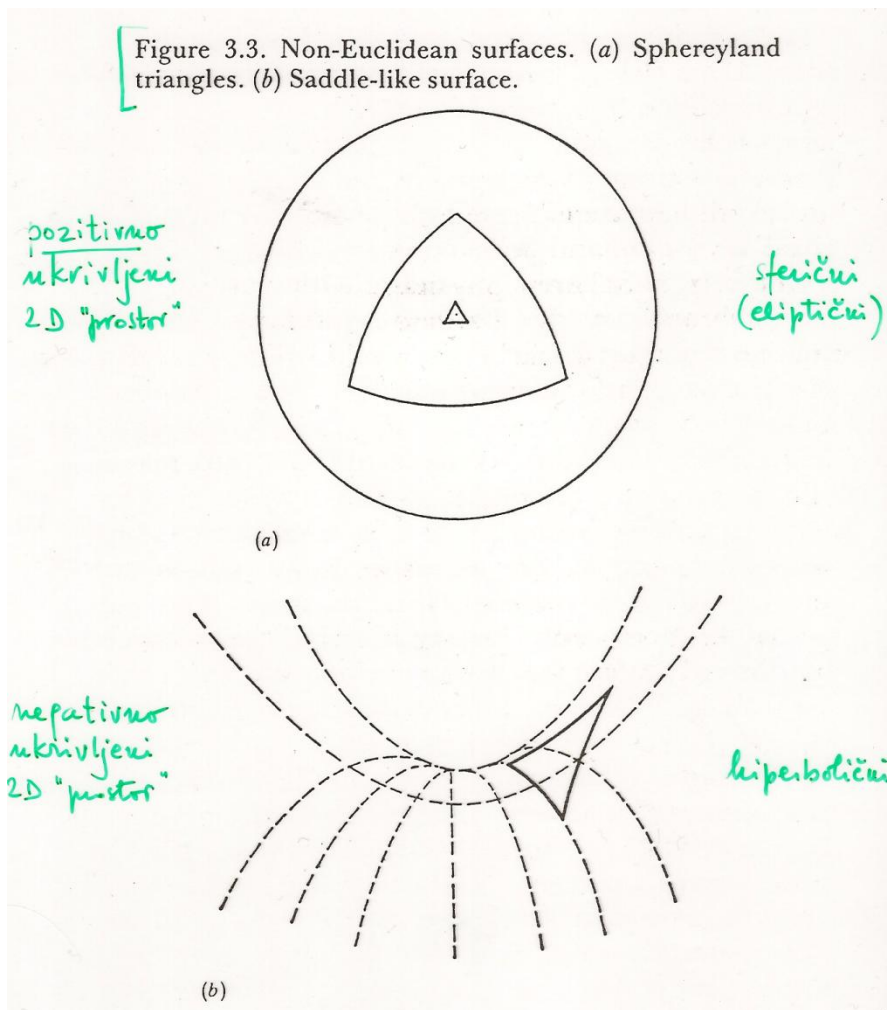
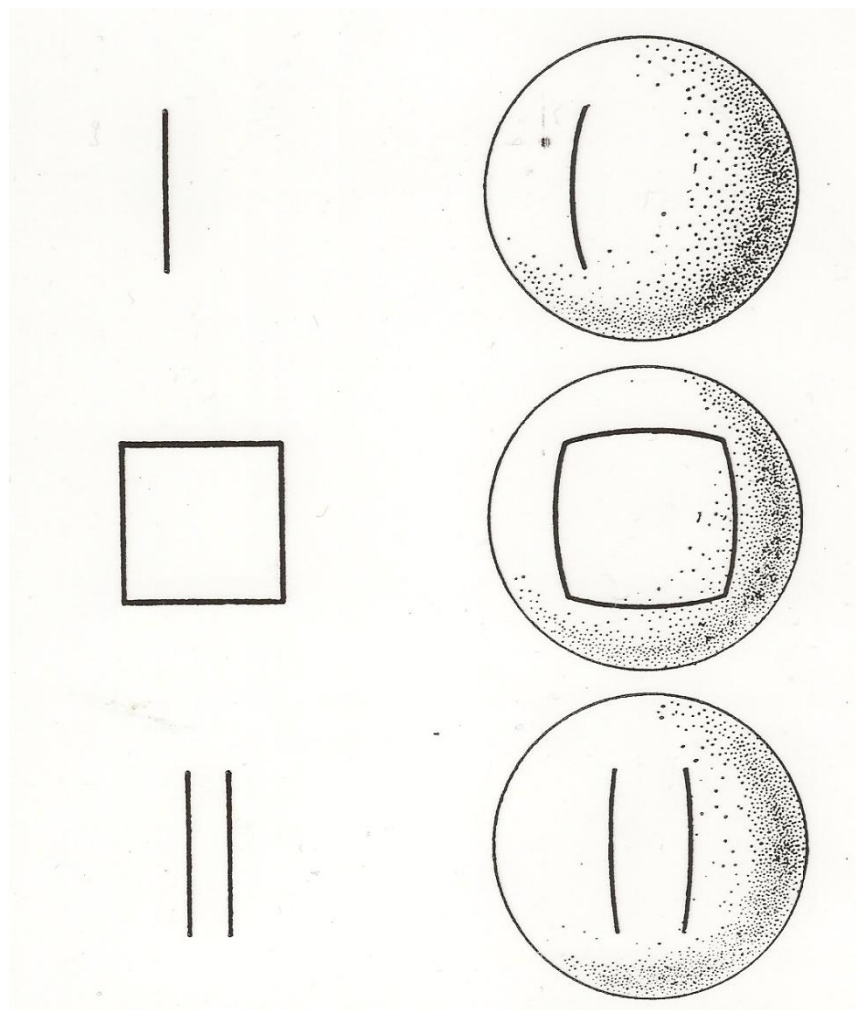


Figure 10.8. A curved surface covered with numerous triangles. Each triangle tells us the value of the local curvature.

Vira: B. K. Ridley, *Time, Space and Things*, 1995, str. 50 (slika levo);
Edward Harrison, *Cosmology*, 2000, str. 194 (slika desno)

Geodetke so intrinzično “ravne” črte (“premise”)
v ukrivljenem prostoru (ponazoritev na sferični 2D ploskvi)



Hipersfera

Georg Friedrich Bernhard **Riemann** (1826–1866), Gaussov študent, je leta 1854 posplošil teorijo neevklidskih geometrij tudi na višje dimenzije (4D, 5D, ..., nD).

Med Riemannovimi geometrijami imajo posebno mesto (zaradi svoje “preprostosti”, “prvotnosti”) tri geometrije s konstantno ukrivljenostjo:

- *hipersfera* (pozitivna ukrivljenost)
- *psevdosfera* (negativna ukrivljenost)
- *evklidska* geometrija (“ničelna” ukrivljenost).

Hipersfera ima lahko poljubno število dimenzij (n):

$$x_1, x_2, x_3 \dots x_n \text{ (ali: } x, y, z \dots \text{)}$$

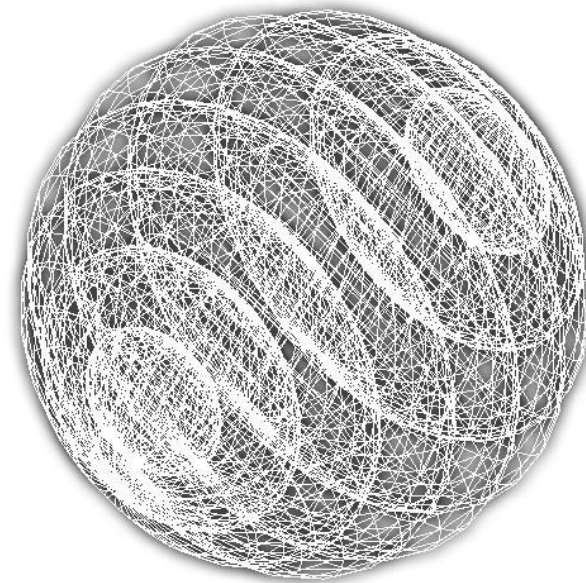
n -hipersfera se definira kot množica točk po formuli:

$$R_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \quad (R \text{ je njen radij),}$$

tj. kot posplošitev 3D sfere (oz. evklidske krogle):

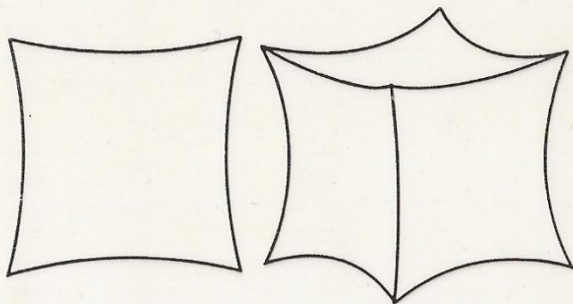
$$R_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ (ali: } R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{).}$$

4D-hipersfera je intuitivno **sfera, katere središče je povsod, obod nikjer**, namreč v 3D prostoru, ki je njena “površina” – *nota bene*: to je bil prostorski model vesolja že pri Nikolaju Kuzanskem (15. st.).

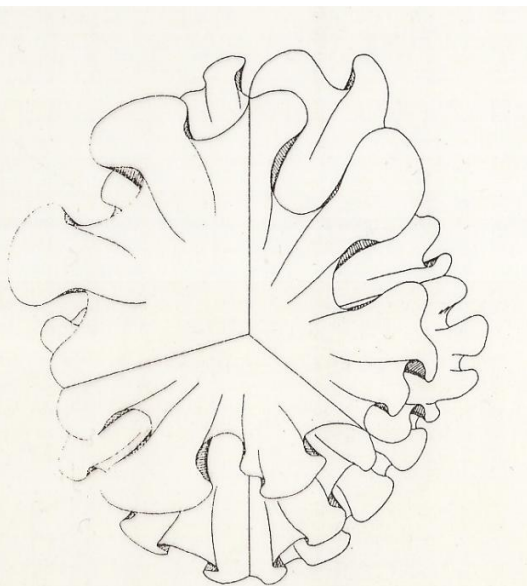


Hipersfera je po volumnu končna – vendar brezmejna!
Na sliki (s spleta) vidimo poskus nemogoče vizualizacije hipersfere v treh dimenzijah (3D): posamezni “krožni” preseki 4D-hipersfere so sfere oziroma krogle v 3D.

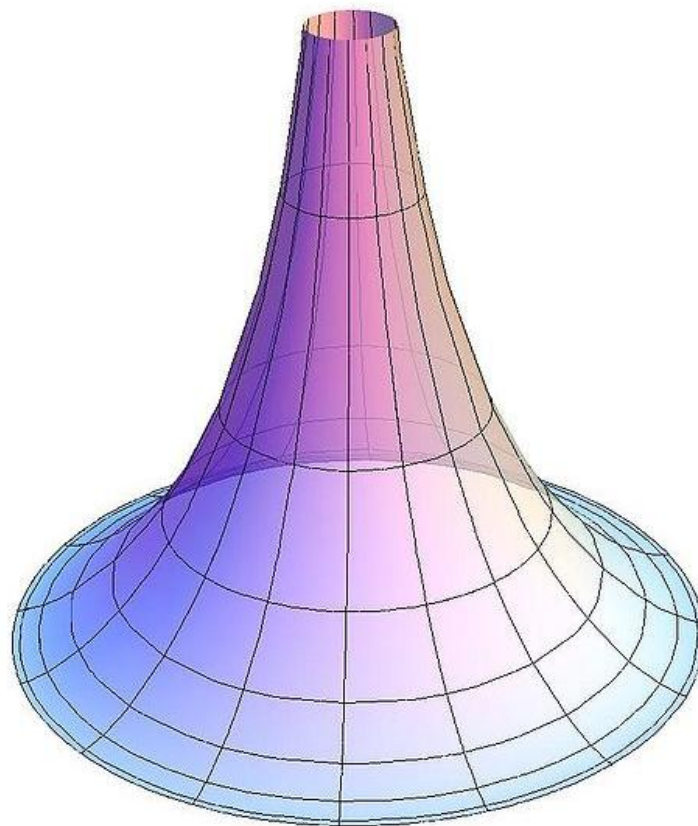
Hiperbolični (negativno ukrivljeni) prostor; psevdosfera



Slika 15.2: Poliedri v hiperboličnem prostoru imajo manjše kote kot poliedri v evklidskem prostoru, tako kot imajo tudi večkotniki v hiperbolični ravnini manjše kote kot večkotniki v evklidski ravnini. Kadar narišemo v evklidski ravnini sliko hiperboličnega večkotnika, ponavadi stranice upognemo navznoter, da so koti pravilni. V hiperbolični ravnini stranice seveda niso ukrivljene, pač pa ravne (geodetke). Podobno ravnamo tudi, kadar hočemo upodobiti hiperbolični polieder: stranske ploskve ukrivimo navznoter, da so koti pravilni, pa čeprav v hiperboličnem prostoru ploskve v resnici niso ukrivljene.



Vsaka rezina hiperboličnega prostora je hiperbolična ravnina.



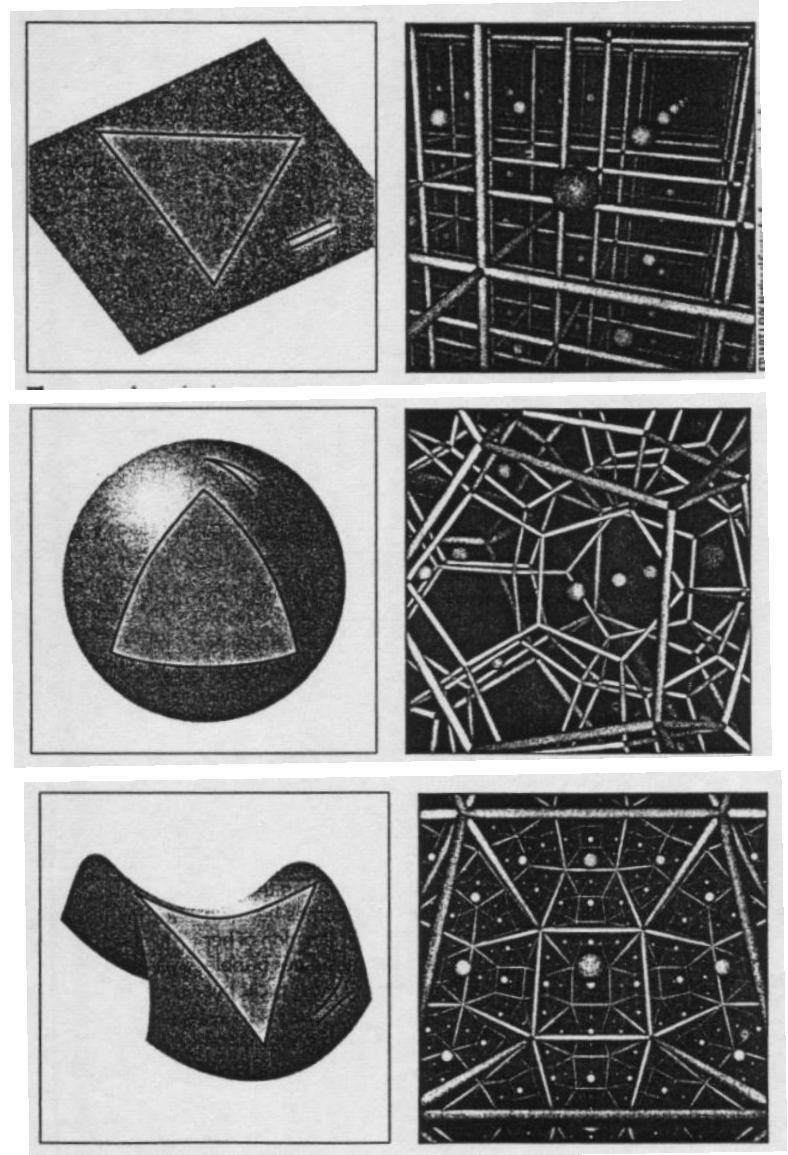
psevdosfera
(ponazoritev v 2D)

Vir obeh levih slik je knjiga: Jeffrey R. Weeks, *Oblika prostora*, Sigma, Lj., 1998; vir desne slike je Wikipedija.

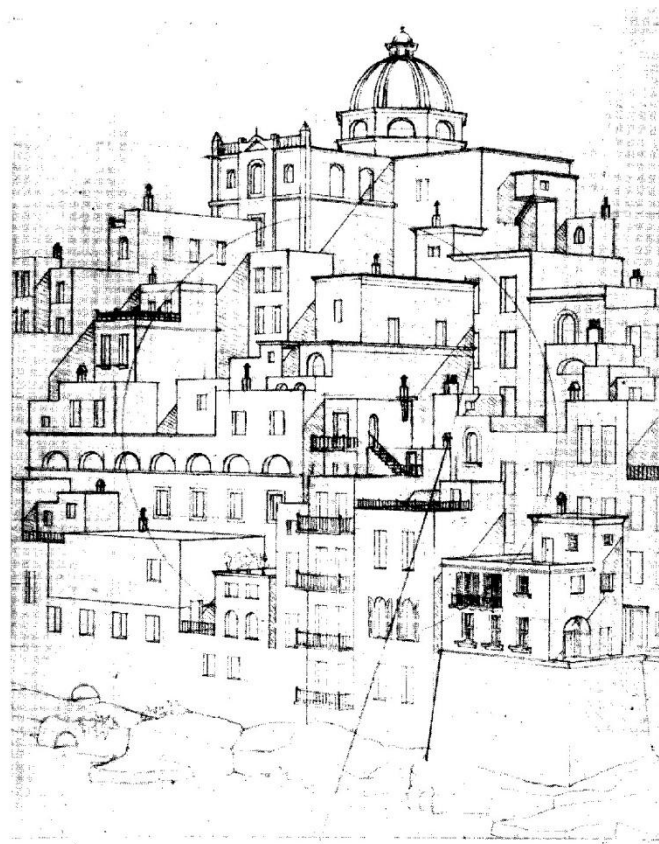
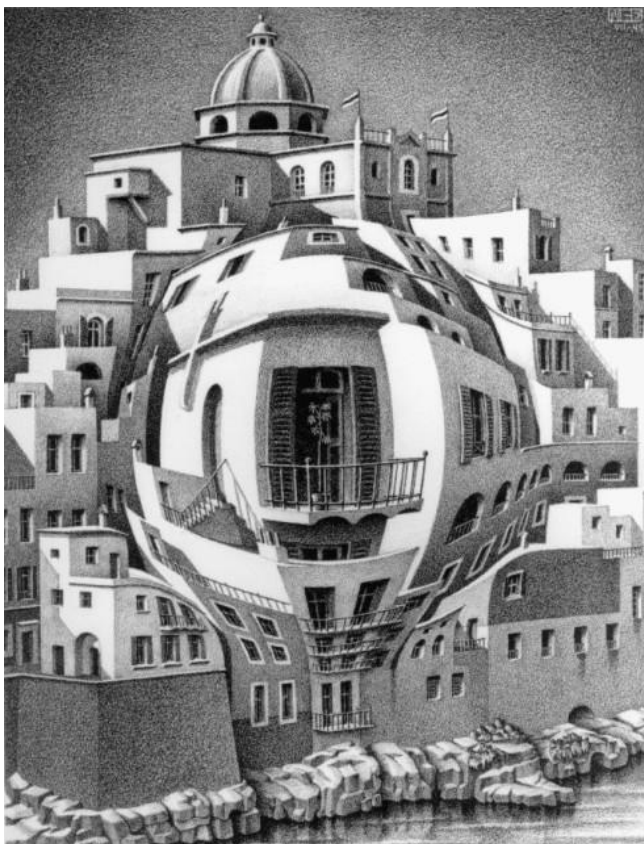
Ukrivljenost prostora optično učinkuje kot povečevalna ali pomanjševalna leča

Slike ponazarjajo optiko v treh konstantno ukrivljenih ("homogenih") prostorih: evklidskem (ravnem), sferičnem in hiperboličnem.

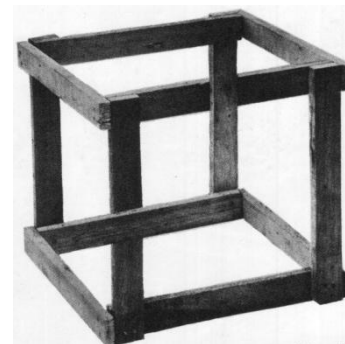
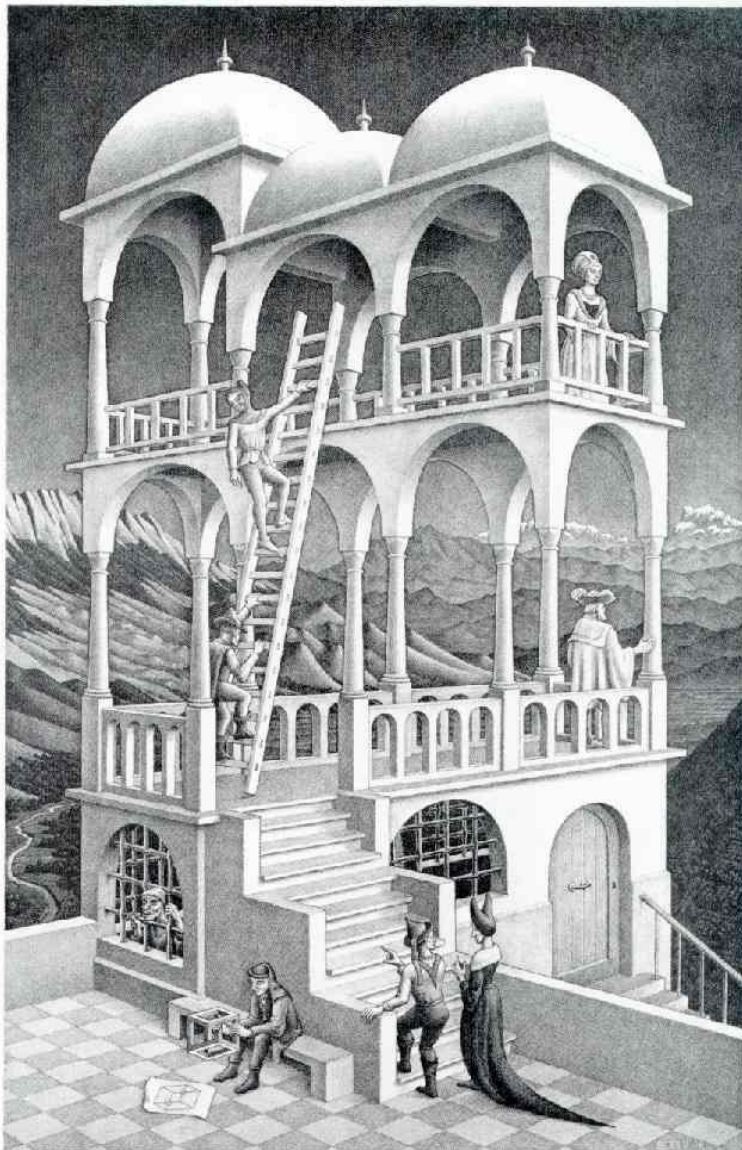
Sferično ukrivljeni prostor optično poveča objekte (do "ekvatorja"), hiperbolični pa jih pomanjša.



M. C. Escher: *Balkon*, litografija, 1945 (*levo*),
in prvotna “evklidska” skica zanj (*desno*)



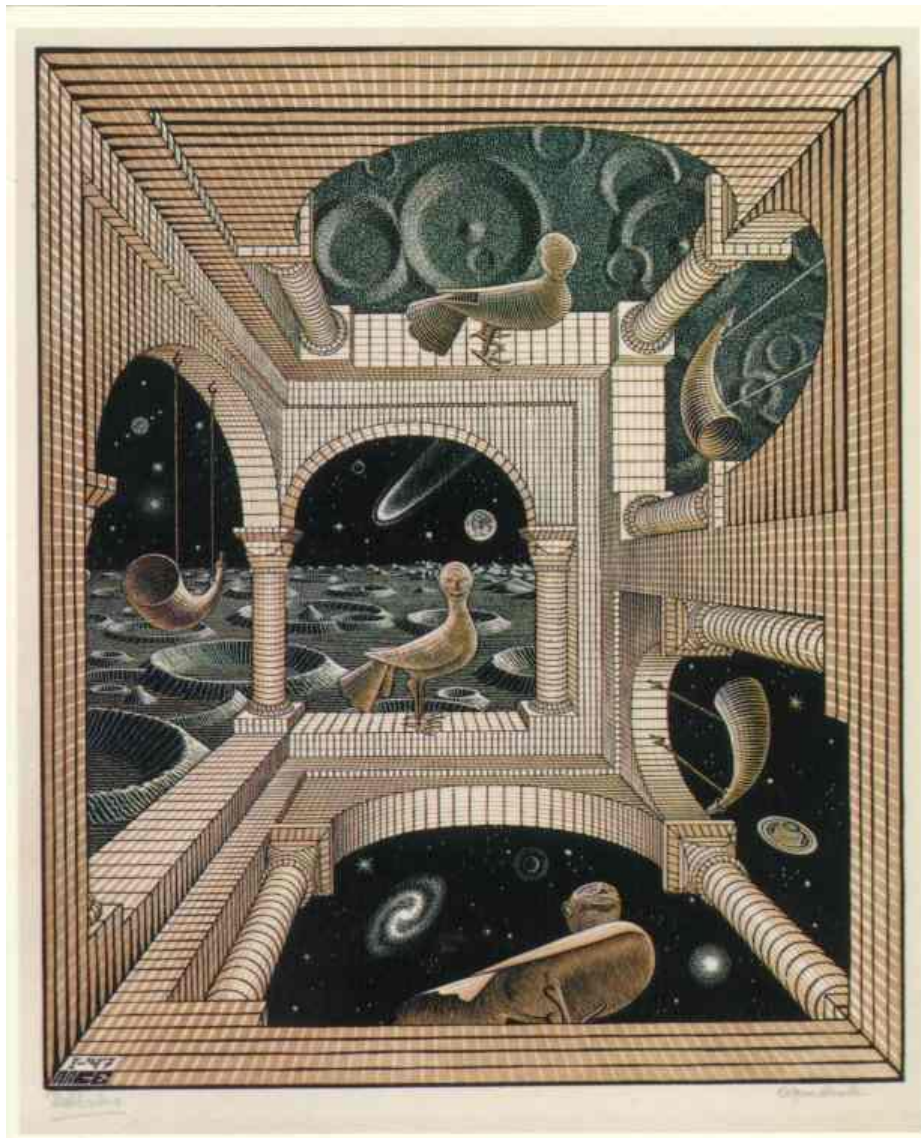
Escher: *Belvedere*, litografija, 1958



“Nora kletka”

Na sliki je perspektiva v sicer evklidskem prostoru zasukana za 90°

Escher: *Drugi svet II*, litografija, 1947



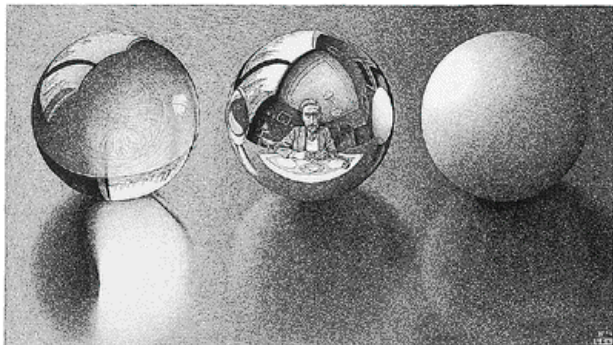
Na sliki je evklidska geometrija, tj. “ravni” 3D prostor, viden s treh različnih perspektiv

Escher: *Möbiusov trak II*, lesorez, 1963

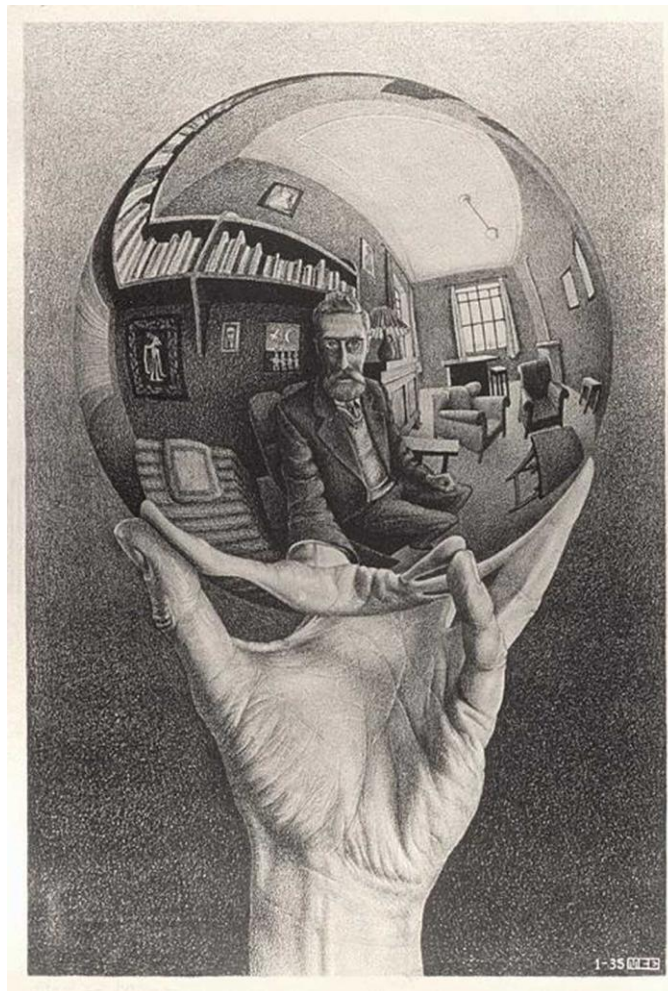


Möbiusov trak je 2D ploskev
z eno samo površino

Zrcaljenje in sámónanašanje: kdo sem *jaz*, “M. C. E.” ...?

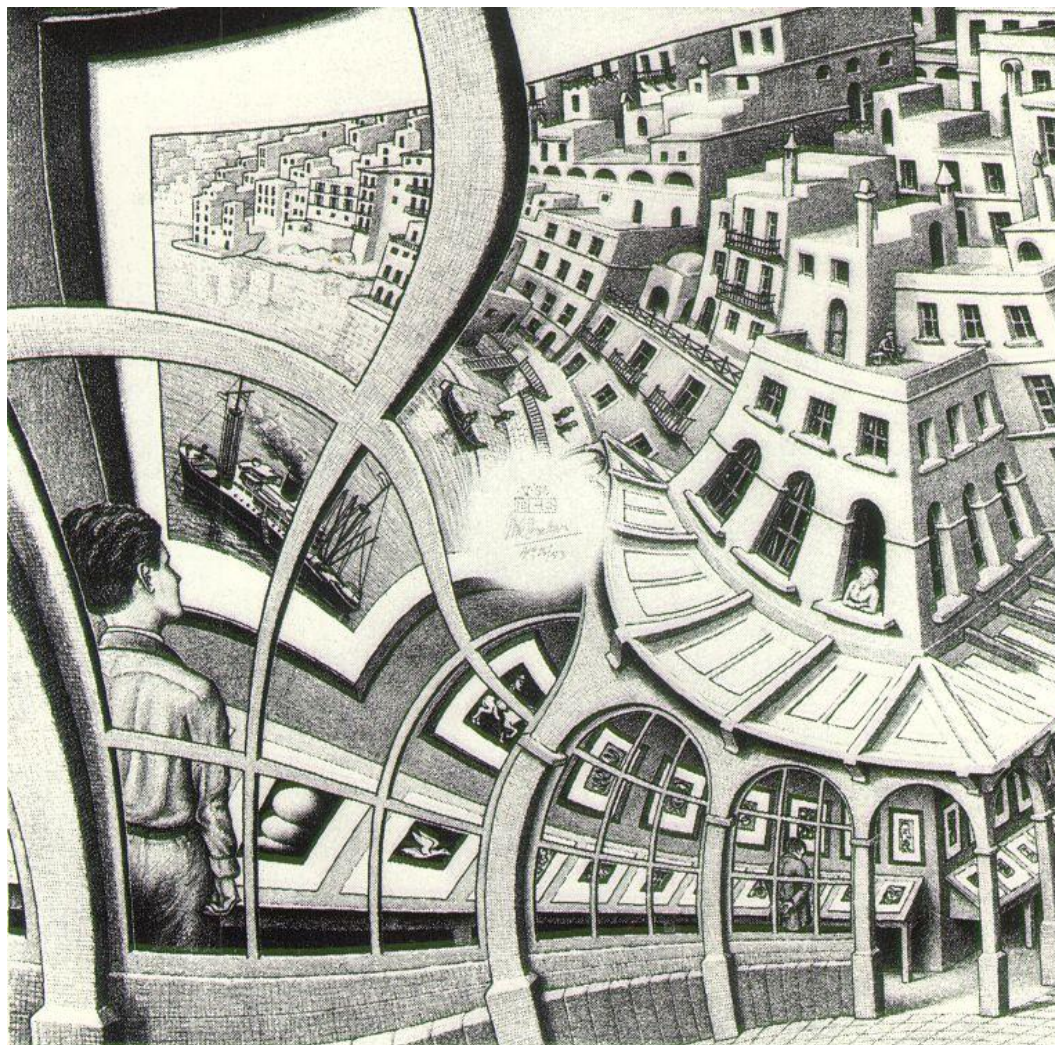


Tri krogle II, litografija, 1946



Roka z zrcalno kroglo
litografija, 1935

Escher: *Galerija grafik*, litografija, 1956



V beli pegi
("fokusu") je
vpisano ime:
M.C. Escher