Obrestno obrestni račun

Osnovni pojmi.

- *vloga*: denarni znesek, ki ga vložimo v banko
- *dolg*: denarni znesek, ki si ga izposodimo
- *glavnica* ali *kapital*: skupno ime za vlogo (vloženi kapital) in dolg (izposojeni kapital)
- *obresti*: najemnina,
  - ki jo plačamo za izposojeni kapital ali
  - najemnina, ki jo dobimo od banke za vloženi kapital
- obresti so določene v odstotkih od kapitala v enem letu (*letna obrestna mera*)

Oznake.

- $a \dots$ kapital
- $p \dots$ obrestna mera
- $o \dots$ obresti
- $\frac{o \cdot n}{360} \dots$ obrestna mera v n dnevih

Dva tipa obrestovanja.

1. *navadno obrestovanje:* ves obrestovalni čas se obrestuje le kapital,
2. *obrestno obrestovanje:* prištevamo obresti ob določenih časovnih rokih kapitalu (*kapitalizacija* obresti) in naprej obrestujemo kapital s prištetimi obrestmi.

Navadno obrestovanje: Vložimo kapital a, letna obrestna mera je $p\%$, varčujemo n let.

- glavnica (na začetku): a
- po enem letu: $a_1 = a + o = a + \frac{a \cdot p}{100}$
- po dveh letih: $a_2 = a + o = a + \frac{a \cdot p \cdot 2}{100}$

  $\vdots$
- po n letih: $a_n = a + o = a + \frac{a \cdot p \cdot n}{100}$

V n letih je

$$o = \frac{a \cdot p \cdot n}{100}$$

obresti.

Primer 1.
Kakšen je dolg pri navadnem obrestovanju po enem, dveh, treh, desetih letih, če je glavnica 100000 SIT in je obrestna mera 5%.
Primer 2.
Sposodimo si 9000 SIT, pri obrestni meri 8% plačamo 400 SIT obresti.

1. Po koliko dneh se je obrestoval dolg?
2. Kolikšne bi bile obresti po 40 dnevih?

Kako bi opisal gibanje kapitala z zaporedjem?

Obrestno obrestovanje:
Primer
V banko vložimo kapital a po obrestni meri $p\%$. Obresti se kapitalizirajo letno. Koliko imamo na računu po n letih?
Oznaka: $a_n \dots$ vrednost vloge po n letih.
Po prvem letu:

$$a_1 = a + o = a + a \cdot \frac{p}{100} = a(1 + \frac{p}{100}) = a \cdot k,$$

faktor $k = 1 + \frac{p}{100}$ imenujemo *obrestovalni faktor.* Na začetku druge obrestovalne dobe je to vrednost kapitala.
Po drugem letu:

$$a_2 = ak + ak\frac{p}{100} = ak(1 + \frac{p}{100}) = ak^2,$$

Po tretjem letu:

$$a_2 = ak^2 + ak^2\frac{p}{100} = ak^2(1 + \frac{p}{100}) = ak^3,$$

na koncu n-te obrestovalne dobe pa

$$a_n = a \cdot k^n.$$

Kako bi opisal gibanje kapitala z zaporedjem?
Primer 1. Na kolikšno vrednost naraste vloga 60000SIT, po petih letih pri obrestni meri 7% in pri:

1. letni kapitalizaciji obresti:
$$a_5 = a \cdot k^5 = 60000 \cdot 1.07^5 = 84153$$
2. poletni kapitalizaciji obresti:
$$a_5 = a \cdot (1 + \frac{p_r}{100})^n$$
Sledi $k = 1.035, n = 10$ (obrestna obdobja),
$p_r = \frac{p}{2} \dots$ *relativna* obrestna mera.
$$a_5 = 84635$$
3. pri navadnem obrestovanju:
$$a + o = 60000 + \frac{apn}{100} = 21000 = 72000$$

Naloge:

1. Na kolikšno vrednost naraste glavnica 300000 sit v 4 letih pri obrestni meri 6% in letni kapitalizaciji obresti?

2. Kolikšen kapital je treba naložiti v banki, da bo v petih letih narastel pri obrestni meri 8% na 200 000 SIT, če je kapitalizacija obrestu letna?

3. Kakšna je bila letna obrestna mera banke, če je glavnica 300000 SIT v sedmih letih narasla na 500000 SIT pri letni kapitalizaciji?

4. Koliko let je bil naložen kapital 26000 SIT, če je pri polletni kapitalizaciji in obrestni meri 5% dal 12600 SIT obresti?

5. Po klikšni obrestni meri bi se moral obrestovati poljuben kapital, da bi se podvojil pri polletni kapitalizaciji v 12 letih?

Amortizacija dolga, renta

- *amortizacija dolga*: dolg odplačujemo v enakih obrokih
- *renta*: vloženi znesek izčrpavamo v enakih obrokih

Primer: V začetku vsakega leta vplačamo enak znesek r in sicer n let zaporedoma.

- Kolikšna je vrednost vseh vlog ob času zadnjega vplačila?
- Kolikšna je vrednost vlog m let po zadnjem vplačilu?

Obrestna mera je $p\%$, kapitalizacija je letna.

$r \ldots$ obrok
$k = 1 + \frac{p}{100}$
Ob zadnjem vplačilu:

- zadnji (n-ti) obrok r se ne obrestuje,
- lanski obrok r se obrestuje enkrat: $r \cdot k$
- predlanski obrok r se obrestuje enkrat: $r \cdot k^2$

  $\vdots$
- prvi obrok se obrestuje $n-1$ leto, torej $n-1$ krat: $r \cdot k^{n-1}$.

Vsota vseh vlog:

$$S = rk^{n-1} + rk^{n-2} + \ldots + rk + r = \frac{r(k^n - 1)}{k-1}$$

(enaka je vsoti geometrijskega zaporedja prvih n členov z začetnim členom (r) in količnikom, enakim obrestovalnem faktorju k)
m let po zadnjem vplačilu:

- skupna privarčevana vsota ob zadnjem vplačilu se obrestuje m let:

$$S = \frac{r(k^n - 1)}{k-1} \cdot k^m$$

Primer 2: Vsako leto vložimo 6 let zaporedoma znesek 50000 SIT. Kolikšna je vrednost vseh vlog na koncu leta, ko smo vložili zadnji znesek, če je obrestna mera 8% ob letni kapitalizaciji obresti?

$$S = \frac{r(k^6 - 1)}{k-1} \cdot k = 396140$$

Primer 3: Dolg $4 \cdot 10^5$ SIT odplačamo v štirih enakih zaporenih letnih obrokih, prvi obrok dve leti po zadolžitvi. Kolikšen je vsak obrok, če je obrestna mera 6%, kapitalizacija pa letna? $a = 400000$ SIT, 4 obroki, $p = 6, k = 1.06$, zanima na r. Ker prvega odplamo na koncu drugega leta, odplačamo vse na koncu petiga leta:

- dolg naraste z obrestmi na $a \cdot k^5$

Odplačevanje:

- na koncu petega leta je vrednost prvega obroka $r \cdot k^3$,
- na koncu petega leta je vrednost drugega obroka $r \cdot k^2$,
- na koncu petega leta je vrednost tretjega obroka $r \cdot k$,
- na koncu petega leta je vrednost četrtega obroka $r \cdot k$.

Sklepamo:

$$ak^5 = r \cdot k^3 + r \cdot k^2 + r \cdot k + r,$$

izrazimo r

$$r = \frac{ak^5(k-1)}{(k^4 - 1)} = 122363$$