MENELAJEV IZREK

Izrek 1 *Naj bodo X, Y, Z točke na nosilkah stranic BC, AC in AB trikotnika $\triangle ABC$. Točke X, Y, Z so kolinearne natanko tedaj, ko velja:*

$$\frac{(BX)}{(XC)} \cdot \frac{(CY)}{(YA)} \cdot \frac{(AZ)}{(ZB)} = -1$$

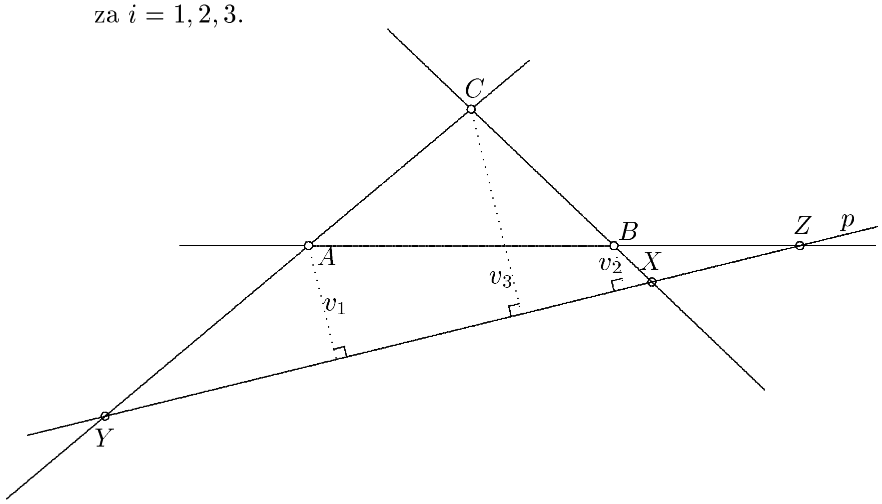
Dokaz:
Naj bodo točke X, Y, Z kolinearne točke ki ležijo na premici p.
Dokažimo ekvivalentno enakost

$$\frac{(BX)}{(CX)} \cdot \frac{(CY)}{(AY)} \cdot \frac{(AZ)}{(BZ)} = 1. \tag{1}$$

Potegnimo pravokotnice na premico p iz točk A, B in C ter jih označimo z v_1, v_2, v_3. Definirajmo

$$h_i = \begin{cases} v_i, & \text{če je točka na pozitivni polravnini} \\ -v_i, & \text{če je točka na negativni polravnini} \end{cases}$$

za $i = 1, 2, 3$.



Iz slike razberemo tri pare podobnih pravokotnih trikotnikov. Sledi

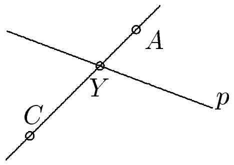
$$\frac{|CY|}{|AY|} = \frac{v_3}{v_1}, \qquad \frac{|AZ|}{|BZ|} = \frac{v_1}{v_2}, \qquad \frac{|BX|}{|CX|} = \frac{v_2}{v_3}. \tag{2}$$

Nas zanimajo pa vrednosti razmerij usmerjenih daljic. Pokažimo, da velja

$$\frac{(CY)}{(AY)} = \frac{h_3}{h_1}.$$

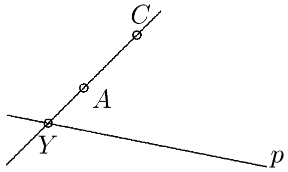
Absolutni vrednosti obeh števil sta zaradi definicije h_i in (2) enaki; zanima nas le predznak.
Ločimo dva primera:

(a) Leva stran je negativna. V tem primeru je količnik $\frac{(YC)}{(YA)}$ negativen, kar pomeni, da sta usmerjeni daljici različno predznačeni.



Smeri $Y \to A$ in $Y \to C$ sta različni. Y leži na stranici med točkama A in C. Točki A in C ležita na različnih polravninah premice p; vrednosti h_1, h_3 sta različno predznačeni: $\frac{h_1}{h_3} < 0$.

(b) Leva stran je pozitivna. Količnik $\frac{(YC)}{(YA)}$ je pozitiven, usmerjeni daljici sta isto predznačeni. Smeri $Y \to A$ in $Y \to C$ sta isti.



Točki sta na isti polravnini glede na p, zato sta h_3 in h_1 enako predznačena; sledi $\frac{h_1}{h_3} > 0$.

Dokazali smo: $\frac{(CY)}{(AY)} = \frac{h_3}{h_1}$, podobno pokažemo tudi $\frac{(AZ)}{(BZ)} = \frac{h_1}{h_2}, \frac{(BX)}{(CX)} = \frac{h_2}{h_3}$.
Sledi

$$\frac{(BX)}{(CX)} \cdot \frac{(CY)}{(AY)} \cdot \frac{(AZ)}{(BZ)} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_2} = 1.$$

Pokažimo še obratno. Naj velja (1). Oglejmo si lego premic $n(A, B)$ in $n(X, Y)$. Ločimo dve možnosti.

(I) Nosilki nista vzporedni, sekata se v Z'.

Pokažimo, da je $Z = Z'$. Ker so X, Y, Z' kolinearne, velja

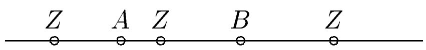
$$\frac{(BX)}{(CX)} \cdot \frac{(CY)}{(AY)} \cdot \frac{(AZ')}{(BZ')} = 1.$$

Slednje skupaj z (1) implicira

$$\frac{(AZ)}{(BZ)} = \frac{(AZ')}{(BZ')} = k.$$

Torej je

$$\begin{aligned} (AZ) &= k(BZ) \\ (AZ') &= k(BZ'). \end{aligned}$$



Neodvisno od lege točke Z pridemo do rezultata na desni.

$$\begin{aligned} (AB) &= (AZ) + (ZB) \\ &= k(BZ) + (ZB) \\ &= (BZ)(k-1) \\ (BZ) &= \frac{1}{k-1}(AB) \qquad (3) \end{aligned}$$

Podobno pokažemo še:

$$(BZ') = \frac{1}{k-1}(AB). \qquad (4)$$

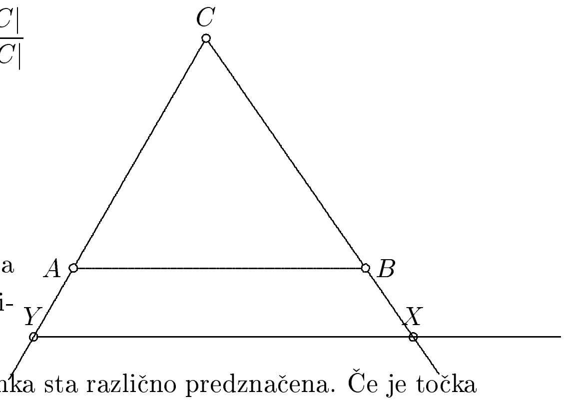
To pomeni, da sta absolutni vrednosti enaki: $|BZ| = |BZ'|$, kar pomeni, da sta

Z in Z' od B enako oddaljeni. Zaradi (3) in (4) sta tudi istih predznakov, zato ležita na isti strani glede na točko B. Odtod sledi $Z = Z'$.

(II) nosilki $n(X,Y)$ in $n(A,B)$ sta vzporedni. Potem velja

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|CY|}{|CX|} = \frac{|CY|-|AC|}{|CX|-|BC|} = \frac{|AY|}{|BX|}$$

Odtod sledi $$\frac{|CY|}{|AY|}\cdot\frac{|BX|}{|CX|} = 1$$



Po (1) velja $\frac{|AZ|}{|BZ|} = 1$, kar pomeni, da je točka Z razpolovišče stranice AB oziroma $\frac{(AZ)}{(BZ)} = -1$.

Iz (1) sledi $\frac{(CY)}{(AY)}\cdot\frac{(BX)}{(CX)} = -1$, ulomka sta različno predznačena. Če je točka X na daljici BC, točka Y ne leži na daljici AC (podobno sklepamo, če vlogi X in Y zamenjamo). T pa je protislovno s predpostavko, da sta daljici XY in AB vzporedni. $\square$