

V zgodovini matematike so bile formule

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

spirva namenjene izračunu ploščin ter prostornin, kasneje pa so jih uporabljali za razvoj pravil za integracijo polinomov.

Dokazovanje formul za vsote oblike $1^d + 2^d + \dots + n^d$, kjer je d naravno število, ponavadi temelji na indukciji, vendar si s to metodo ne moramo pomagati pri iskanju pravila, ki ga dejansko potrebujemo. Ena izmed metod za iskanje teh formul izhaja Kitajske ter Indije. Poznali so jo že arabski matematiki v Bagdadu in Kairu med leti 1200 in 1400. Temeljila je na latnostih binomskih koeficientov v Pascalovem trikotniku.

[illegible]

Če zapišemo Pascalov trikotnik, opazimo, da velja $1 + 5 + 15 + 35 = 56$. To daje slutiti na

$$\binom{d}{d} + \binom{d+1}{d} + \binom{d+2}{d} + \cdots + \binom{n}{d} = \binom{n+1}{d+1}. \quad (1)$$

Ker binomski simbol $\binom{n}{d}$ pomeni tudi število podmnožic z d elementi v množici z n elementi, lahko definiramo $\binom{n}{d} = 0$ za $d > n$. Tako lahko vsoto (1) zapišemo tudi kot

$$\sum_{x=1}^n \binom{x}{d} = \binom{n+1}{d+1}, \quad (2)$$

kar lahko dokažemo zlahka z indukcijo po n .

Vsak binomski koeficient $\binom{x}{d}$ je polinom spremenljivke x stopnje d , recimo

Velja

$$\begin{aligned} \binom{x}{1} &= x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}, \quad \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}, \\ \binom{x}{4} &= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{4} + \frac{11x^2}{24} - \frac{x}{4}. \end{aligned}$$

Izrazimo potence spremenljivke x s pomočjo binomskih koeficientov. Tako je

$$\begin{aligned}x &= \binom{x}{1} \\x^2 &= 2\binom{x}{2} + \binom{x}{1} \\x^3 &= 6\binom{x}{3} + 6\binom{x}{2} + \binom{x}{1}.\end{aligned}$$

Če zgornje enakosti povežemo z (2), dobimo

$$\sum_{x=1}^n x = \sum_{x=1}^n \binom{x}{1} = \binom{n+1}{2} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^n x^2 &= \sum_{x=1}^n \left(2\binom{x}{2} + \binom{x}{1} \right) = 2 \sum_{x=1}^n \binom{x}{2} + \sum_{x=1}^n \binom{x}{1} \\&= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^n x^3 &= \sum_{x=1}^n \left(6\binom{x}{3} + 6\binom{x}{2} + \binom{x}{1} \right) = 6 \sum_{x=1}^n \binom{x}{3} + 6 \sum_{x=1}^n \binom{x}{2} + \sum_{x=1}^n \binom{x}{1} \\&= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}\end{aligned} \quad (5)$$

Obstoj formule za $\sum_{x=1}^n x^d$ sledi iz dejstva, da so $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \dots, \binom{x}{d}$ polinomi različne stopnje, zato tvorijo bazo prostora polinomov stopnje $\leq d$. Kaže, da se splošni rezultat izraža z binomskimi simboli v obliki

$$\sum_{x=1}^n x^d = a_{d,d} \binom{n+1}{d} + a_{d,d-1} \binom{n+1}{d-1} + \dots + a_{d,1} \binom{n+1}{1}. \quad (6)$$

Poskusimo dokazati splošni rezultat. Povezavo med koeficienti $a_{d,j}$, kjer sta $d, j \in \mathbb{N}$, poiščimo s pomočjo kombinatoričnega razmisleka v navidez popolnoma drugačnih nalogah.

Prvi problem barvanja hišk: Na koliko načinov lahko pobarvamo d hišk z *natanko* j barvami¹?

Označimo s $H(d, j)$, kjer sta d in j naravni števili, število barvanj d hišk z natanko j barvami.² Očitno je $H(d, j) = 0$, če je $j > d$. V primeru, da imamo d hišk in eno barvo, pobarvamo vse hiške z isto barvo; torej je $H(d, 1) = 1$ za vsak $d \in \mathbb{N}$. Če imamo enako število hišk in in barv, gre dejansko za število vseh bijektivnih preslikav med dvema množicama. Vseh bijektivnih preslikav med končnima množicama z močjo d je $d!$, velja $H(d, d) = d!$. V splošnem imamo na voljo d hišk. Izberemo eno in jo pobarvamo z eno od j barv. Ostane nam

¹mišljeno je: posamezna hiška se pobarva le z eno barvo

²števila $H(d, j)$ so bolj znana kot števila barvanja hiško, angl. "House-painting numbers"

$d - 1$ hišk. Izbrano barvo lahko uporabimo naprej ali pa ne, kar lahko zapišemo z rekurzivno zvezo

$$H(d, j) = j(H(d - 1, j) + H(d - 1, j - 1)).$$

Če nekaj vrednosti $H(d, j)$ zapišemo v tabeli, hitro ugotovimo, da so se že pojavile v razvoju vsote potenc x^d za $d \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$d \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	2				
3	1	6	6			
4	1	14	36	24		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Z drugačnim razmislekom pokažimo pomen števil barvanja hišk $H(d, j)$ in veljavnost v (6):

Drugi problem barvanja hišk: Na koliko načinov lahko pobarvamo d hišk, če želimo uporabiti *največ* j barv?

Če imamo na voljo več barv kot je hišk, lahko uporabimo največ d barv. Če pobarvamo d hišk z natanko eno barvo, izberemo eno barvo izmed j barv, nakar pobarvamo d hišk z natanko eno barvo. Število načinov je $\binom{j}{1} \cdot H(d, 1)$. Na podoben način ugotovimo število vse možnih barvanj z dvema barvama, ki ju izberemo izmed j barv. Teh je $\binom{j}{2} \cdot H(d, 2)$. Tako pridemo do vseh možnosti, ki jih strnemo v

$$\binom{j}{d} H(d, d) + \binom{j}{d-1} H(d, d-1) + \cdots + \binom{j}{1} H(d, 1). \quad (7)$$

Na vsoto (7) pa lahko pogledamo tudi drugače. Označimo z množico barv $B = \{b_1, b_2, \dots, b_j\}$. Na koliko načinov lahko iz znakov iz množice B sestavimo niz na d mestih, kjer je ponavljanje znakov dovoljeno? Gre za število variacij s ponavljanjem j elementov reda d , vseh je torej j^d . Zato je

$$j^d = \binom{j}{d} H(d, d) + \binom{j}{d-1} H(d, d-1) + \cdots + \binom{j}{1} H(d, 1).$$

Ko uporabimo zgornjo enakost za izračun vsote in upoštevamo še (2), dobimo željeno zvezo

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n x^d &= \sum_{x=1}^n H(d, d) \binom{x}{d} + \sum_{x=1}^n H(d, d-1) \binom{x}{d-1} + \cdots + \sum_{x=1}^n H(d, 1) \binom{x}{1} \\ &= H(d, d) \binom{n+1}{d+1} + H(d, d-1) \binom{n+1}{d} + \cdots + H(d, 1) \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

Naloge

1. Na koliko načinov lahko pobarvamo 6 hišk z natanko štirimi barvami?
2. Na koliko načinov lahko pobarvamo 6 hišk z največ štirimi barvami?
3. Zapiši formulo za $1^5 + 2^5 + \cdots + n^5$ s pomočjo binomskih koeficientov.

Rešitve nalog

1. Vsak koeficient $H(d, j)$ izračunamo s pomočjo tabele. Če upoštevamo rekurzivno zvezo $H(d, j) = j(H(d-1, j) + H(d-1, j-1))$, dobimo določeni koeficient tako, da izračunamo vsoto koeficienta, ki je v istem stolpcu prejšnje vrstice ter koeficienta, ki je v prejšnji vrstice levo od njega. Dobljeno vsoto pomnožimo s številko stolpca. Tako je

$$H(6, 4) = 4(H(5, 4) + H(5, 3)) = 4(150 + 240) = 1560.$$

Opomba: slabost tega načina je, da moramo dopolniti tabelo do vključno pete vrstice. To pa že kliče po zapisu računalniškega algoritma, ki bi generiral $H(d, j)$. Oglejmo si primer funkcijskega podprograma v Pascalu:

```
function H(d,j: integer): real;
begin
  if (j>d) then H:=0
  else begin
    if (j=1) or (d=1) then H:=1
    else
      H:=j*(H(d-1,j)+H(d-1,j-1));
    end;
  end;
```

2. Rezultat dobimo lahko na dva načina, saj velja

$$4^6 = \underbrace{\binom{4}{6}H(6,6)}_{=0} + \underbrace{\binom{4}{5}H(6,5)}_{=0} + \binom{4}{4}H(6,4) + \cdots + \binom{4}{1}H(6,1) = 4096.$$

3. S pomočjo končnega rezultata pridemo do zveze

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n x^5 &= \sum_{x=1}^5 H(5,5) \binom{x}{5} + \sum_{x=1}^n H(5,4) \binom{x}{4} + \cdots + \sum_{x=1}^n H(5,1) \binom{x}{1} \\ &= H(5,5) \binom{n+1}{6} + H(5,4) \binom{n+1}{5} + \cdots + H(5,1) \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

Če bi zadnjo vrstico poenostavljali še naprej, bi dobili eksplicitno formulo

$$\sum_{x=1}^n x^5 = \frac{n^6}{6} - \frac{3}{2}n^5 + \frac{245}{12}n^4 - 30n^3 - \frac{241}{12}n^2 + 32n.$$

Vir:

<http://www.macalester.edu/~bressoud/talks/APNC2004/FTC.pdf>

prevedel in priredil *Matej Mlakar*