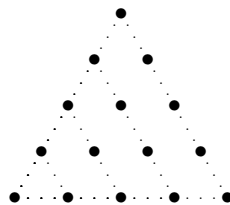


Poligonska števila

Poligonska števila so pojem, ki je bil znan že v stari Grčiji. Za *Pitagorejce* je bil svet števil mistični svet, abstraktnim pojmom so posvečali še več pozornosti, če so se dali nazorno ponazoriti. Verjeli so, da lahko naravo ponazorimo s števili. *Nikomah* omenja poligonska števila v svojem delu **Uvod v aritmetiko**, vendar večino svojih opazanj o poligonskih številih ne dokazuje.

Dejansko gre za naravna števila, ki so določena s številom točk mreže. Točke so razporejene v obliki n -kotnika različnih dimenzij.

Trikotna števila dobimo s pomočjo vzorca trikotnikov na sliki 1. Dogovorimo se, da za trikotnik dimenzije 1 potrebujemo eno točko. Če želimo skonstruirati trikotnik dimenzije 2, potrebujemo za to 3 točke, za trikotnik dimenzije 3 potrebujemo 6 točk vzorca, za trikotnik dimenzije 4 pa 10 točk, ...



Slika 1: Trikotna števila

Na hitro bi lahko trikotna števila strnili v zaporedje naravnih števil

$$\mathbf{T} = (T_i)_{i=1}^{\infty} = (1, 3, 6, 10, 15, \dots).$$

Opazimo, da lahko zaporedje zapišemo kot $\mathbf{T} = (1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \dots)$, kar pomeni očitno rekurzivno zvezo

$$T_n = T_{n-1} + n, \text{ kjer je } T_1 = 1.$$

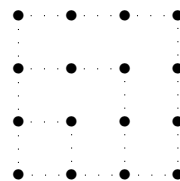
Eksplisitno formulo tudi ni težko zapisati (bojda jo je našel Gauss pri desetih letih):

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ T_n &= n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \text{Enačbi seštejemo} \quad 2T_n &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ krat}} \end{aligned} \quad (1)$$

Sledi

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Kvadratna števila prikažemo podobno kot trikotna, s kvadratno mrežo preštejemo točke, potrebne za kvadrat ustrezne dimenzije. Upoštevajoč sliko dobimo zaporedje naravnih števil



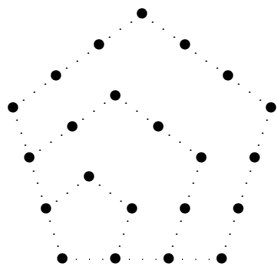
$$\mathbf{S} = (S_i)_{i=1}^{\infty} = (1, 4, 9, 16, \dots).$$

Slika 2: Kvadratna števila

Vidimo, da je kvadratu, ki ima na stranici i kvadratkov, potrebno dodati $2i - 1$ kvadratkov za kvadrato naslednje dimenzije, zato

$$S_i = S_{i-1} + (2i - 1).$$

S podobnim postopkom kot za člen T_n pridemo do rezultata $S_n = n^2$, kar pomeni, da je **S** zaporedje popolnih kvadratov.



Podobno ugotovimo rekurzivno zvezo za **petkotna (pentagonalna) števila** P_n (glej sliko 3) in **šestkotna (heksagonalna) števila** H_n . Iz rekurzivnih zvez

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + (3n - 2), \quad P_1 = 1, \\ H_n &= H_{n-1} + (4n - 3), \quad H_1 = 1 \end{aligned}$$

Slika 3: petkotna števila

s postopkom (1) sledita eksplicitni formuli

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{n(3n - 1)}{2}, \\ H_n &= n(2n - 1). \end{aligned}$$

Kaj pa splošna formula? Poimenujmo zaporedje

$$\mathbf{P}^k = (p_i^k)_{i=1}^{\infty}$$

množico poligonskih števil reda k , kjer število k označuje k -kotnik. Na podlagi analize prvih šest poligonskih števil se hitro pojavi induktivni sklep

$$p_n^k = p_{n-1}^k + ((k - 2)n - (k - 3)).$$

Označimo drugi sumand z $r_n^k = ((k - 2)n - (k - 3))$. Velja $r_i^k = p_i^k - p_{i-1}^k$. Upoštevajoč postopek v (1) sledi

$$\begin{aligned} p_n^k &= r_1^k + r_2^k + \dots + r_{n-1}^k + r_n^k, \\ p_n^k &= r_n^k + r_{n-1}^k + \dots + r_2^k + r_1^k, \end{aligned}$$

Enakosti seštejemo in delimo z 2

$$p_n^k = n \cdot \frac{(p_1^k + r_n^k)}{2} = \frac{n((k - 2)n - (k - 4))}{2}. \quad (2)$$

Naš dokaz pa ima seveda veliko 'luknjo'. Upoštevali smo, da velja

$$r_1^k + r_n^k = r_i^k + r_{n-i+1}^k \text{ za vsak } i = 2, 3, \dots, (n - 1),$$

kar pa nismo dokazali. Rezultat (??) je zatorej le predpostavka, ki jo lahko dokažemo z matematično indukcijo po n .

Za $n = 1$ velja $p_1^k = 1$. Privzemimo veljavnost p_{n-1}^k in z indukcijskim korakom dokažimo p_n^k :

$$\begin{aligned} p_n^k &= p_{n-1}^k + r_n^k = \\ &= \frac{(n-1)((k-2)(n-1) - (k-4))}{2} + ((k-2)n - (k-3)) \end{aligned}$$

Člene preuredimo in dobimo

$$p_n^k = \frac{1}{2}n(k(n-1) - 2(n-2)) = \frac{1}{2}n((k-2)n - (k-4)),$$

kar smo želeli dokazati.

Poligonska števila so burila duhove tudi času francoskega matematika *Fermata*, ki leta 1638 postavi trditev, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto največ treh trikotnih števil, največ štirih kvadratnih števil, največ pet petkotnih števil oziroma največ n n -kotnih števil. Njegov dokaz trditve niso nikoli našli. *Gauss* pokaže veljavnost za trikotna števila leta 1796, *Jacobi* in *Lagrange* kasneje neodvisno dokažeta veljavnost za kvadratna števila, leta 1813 dokaže *Cauchy* trditev v celoti.

Naloge

1. Pokaži, da je vsako trikotno število tudi število v Pascalovem trikotniku (namig: binomski koeficient).
2. Pokaži, da velja:

$$8T_n + 1 = S_{2n+1}.$$

Za $n = 3$ ponazori zvezo grafično.

3. S pomočjo zvez za trikotna števila

$$\begin{aligned} 9T_n + 1 &= T_{3n+1} \\ 25T_n + 3 &= T_{5n+2} \\ 49T_n + 6 &= T_{7n+3} \end{aligned}$$

oblikuj splošno pravilo ter to nato preveri z računom.

4. Pokaži, da velja

- (a) zveza med trikotnimi in kvadratnimi števili: $T_{n-1} + T_n = S_n$
- (b) zveza med trikotnimi in petkotnimi števili: $\frac{1}{3}T_{3n-1} = P_n$
- (c) zveza med trikotnimi in šestkotnimi števili: $T_{2n-1} = H_n$

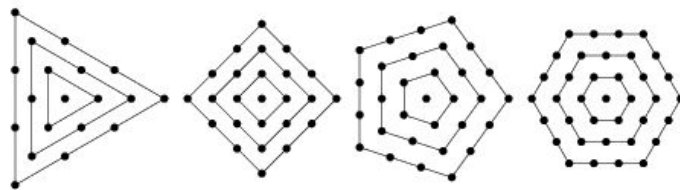
5. Zapiši:

- (a) število 50 kot vsoto dveh, treh ali štirih kvadratnih števil,
- (b) število 100 kot vsoto dveh ali treh trikotnih števil,
- (c) število 2002 kot vsoto dveh, treh, štirih ali petih petkotnih števil.

6. Z matematično indukcijo pokaži

$$(T_n)^2 = 1 + 8 + \dots + (n-1)^3 + n^3$$

7. S pomočjo slike 4 definiraj središčna poligonska števila c_n^k in



pokaži, da velja

$$c_n^k = \frac{kn^2 - kn + 2}{2}.$$

Opomba: na sliki 4 so števila $c_4^3, c_4^4, c_4^5, c_4^6$.

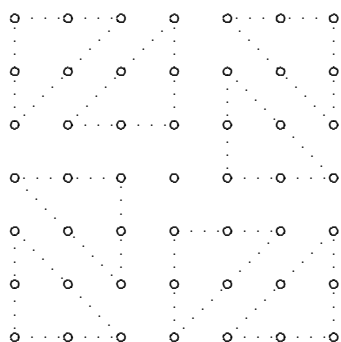
Matej Mlakar

Rešitve

1. Ker za trikotna števila velja $T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$, kar ustreza tretji diagonali v Pascalovem trikotniku.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & & \vdots & & & & & & \end{array}$$

2. Podajmo grafični dokaz za $n = 3$, pravilnost zveze dokažimo še formalno:



Za vsak naravni n velja $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sledi

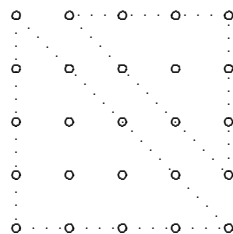
$$\begin{aligned} 8T_n + 1 &= 4n(n+1) + 1 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 \\ &= S_{2n+1} \end{aligned}$$

Slika 4: $8T_3 + 1 = S_7$

3. Na podlagi primerov sklepamo na $(2a+1)T_n + T_a = T_{(2a+1)n+a}$.

4.

$$(a) \quad T_{n-1} + T_n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2 = S_n$$



Slika 5: $T_4 + T_5 = S_5$

$$(b) \quad 3P_n = 3 \cdot \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{((3n-1)+1)(3n-1)}{2} = T_{3n-1}$$

$$(c) \quad H_n = n(2n-1) = \frac{(2n-1)2n}{2} = \frac{(2n-1)((2n-1)+1)}{2} = T_{2n-1}$$

5. Zapišimo za vsako izmed števil nekaj možnosti:

$$\begin{aligned} 50 &= 25 + 25 = S_5 + S_5 & 100 &= 91 + 6 + 3 = T_{13} + T_3 + T_2 \\ &= 49 + 1 = S_7 + S_1 & &= 55 + 45 = T_{10} + T_9 \\ &= 25 + 16 + 9 = S_5 + S_4 + S_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2002 &= 1001 + 1001 = P_{26} + P_{26} \\ &= 1520 + 477 + 5 = P_{32} + P_{18} + P_2 \\ &= 1717 + 176 + 92 + 12 + 5 = P_{34} + P_{11} + P_8 + P_3 + P_2 \end{aligned}$$

6. Za $n = 1$ velja $(T_1)^2 = 1$. Dokažimo še za $n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 8 + \dots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 &= (T_n)^2 + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= \frac{(n^2 + n)^2}{4} + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} \\ &= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} = (T_{n+1})^2 \end{aligned}$$

7. Označimo s c_n^3 središčna trikotna števila: pri tvorbi c_{n+1} moramo dodati številu c_n toliko točk, kolikor jih je v največjem trikotniku ter še 3 povrhu (vsaki stranici dodamo 3 točke), kar pomeni

$$c_{n+1}^3 = c_n^3 + 3(n-1) + 3 = c_n^3 + 3n.$$

Podobno sklepamo za središčna števila c_n^4 :

$$c_{n+1}^4 = c_n^4 + 4(n-1) + 4 = c_n^4 + 4n.$$

Oblikujemo induktivno predpostavko:

$$c_{n+1}^k = c_n^k + k(n-1) + k = c_n^k + kn,$$

ki jo dokažemo z indukcijo po n .

$$n = 1 : \quad c_2^k = c_1^k + k.$$

$$n \rightarrow n + 1 :$$

$$\begin{aligned} c_n^k + kn &= \frac{2 + kn^2 - kn}{2} + kn \\ &= \frac{2 + kn^2 + kn}{2} \\ &= \frac{2 + kn^2 + 2kn + k - k - 2kn + kn}{2} \\ &= \frac{2 + k(n+1)^2 - k(n+1)}{2} = c_{n+1}^k \end{aligned}$$

□