

Neenakosti

Osnovne lastnosti neenakosti:

1. $(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c)$ (tranzitivnost $>$)
Opomba: Relacija $>$ ni refleksivna, niti simetrična (razmisli!), relacija $\geq$ je ekvivalenčna (razmisli!)
2. $(a > b) \Rightarrow (a + n) > (b + n)$ (znak neenakosti se pri prištevanju ohranja)
3. $(a > b) \Rightarrow (a - n) > (b - n)$ (znak neenakosti se pri odštevanju ohranja)
4. $(a > b) \Rightarrow (an) > (bn)$, če $n > 0$
5. $(a > b) \Rightarrow (an) < (bn)$, če $n < 0$ (pri množenju z negativnim številom se znak neenakosti obrne)
6. $(a > b > 0) \wedge (x > 0) \Rightarrow (a^x > b^x)$
7. $a > 1) \wedge (x > y > 0) \Rightarrow (a^x < a^y)$
8. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, če $a, b > 0$
9. $a^2 \geq 0, (a+b)^2 \geq 0, (a+b+c)^2 \geq 0, \dots$ (kvadrati so nenegativna števila)

Uvajalne Naloge

1. Poišči naravna števila, ki zadoščajo neenakosti

$$7 - 3(11x - 3) > 7 - 3(3x + 9).$$

2. Naj bosta a, b pozitivni števili. Dokaži: če je $a \geq b$, sledi $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.
3. Naj bo $ab < 0$. Dokaži: če je $a \geq b$, sledi $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
4. Naj bodo a, b, c pozitivna števila. Dokaži: če je $a > b$, sledi

$$\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$$

5. Naj bodo x, y, z realna števila. Dokaži:

- (a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$
- (b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ (Namig: upoštevaj (a))
- (c) če je $x + y + z = 1$, potem je $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$ (Namig: upoštevaj (b))
- (d) $3(ab + bc + ac) \leq (a + b + c)^2$

6. Naj bodo a, b, c, d pozitivna realna števila. Dokaži:

(a) $(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2(ab + cd) \geq 4\sqrt{abcd}$

(b) Če je $abcd = 1$, je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$.

7. Dokaži:

$$a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$$

8. Naj velja $a \geq b \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Dokaži:

(a) $2(a - b) \leq a^2 - b^2 \leq 2(a - b)a$

(b) $3(a - b)b^2 \leq a^3 - b^3 \leq 3(a - b)a^2$

(c) $n(a - b)b^{n-1} \leq a^n - b^n \leq n(a - b)a^{n-1}$

9. Dokaži:

$$\frac{1}{a^n + a^{-n} - 1} \leq 1$$

10. Primerjaj po velikosti

$$2003^4 \text{ in } 2000 \cdot 2002 \cdot 2004 \cdot 2006$$

11. Posploši prejšnjo nalogo za poljubni naravni n .

12. Dokaži za poljubna realna števila a, b, c :

(a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 6a - 8b + 2c - 26$

(b) $4a^2 + 9b^2 \geq 24b - 12a - 25$

Kdaj je dosežena enakost?

13. Naj bo $a \geq b$. Pokaži, da velja

$$a^3 - b^3 \geq ab(a - b)$$

14. Naj bo $a > 0, b > 0, a > b$. Pokaži, da velja

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - ba^2} > a.$$

15. Naj bo $a > 0, b > 0, a \neq b$. Pokaži, da velja

$$a^6 + b^6 > a^5b + ab^5.$$

16. $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$

Sredine

Naj bosta a, b pozitivni števili.

- *aritmetična sredina*: $A = \frac{a+b}{2}$
- *geometrijska sredina*: $G = \sqrt{ab}$
- *harmonična sredina*: $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$
- *kvadratna sredina*: $K = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

Velja

$$\boxed{\min\{a, b\} \leq H \leq G \leq A \leq K \leq \max\{a, b\}.$$

Enakosti veljajo, ko $a = b$.

Dokaz neenakosti.

1. $G \leq A$.

Ker je $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, sledi $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$.

Preuredimo, delimo z 2 ter dobimo

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

2. $H \leq G$.

Ker je $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ in sta števili pozitivni, sledi $\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$. Neenakost pomnožimo s $ab > 0$. Sledi

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}.$$

3. $A \leq K$.

Ker je $(a-b)^2 \geq 0$, je $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Velja

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \leq \frac{a^2 + (a^2 + b^2) + b^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Sledi s korenjenjem

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

4. $\min\{a, b\} \leq H$.

Brez škode za splošnost privzamemo $a \leq b$. Tedaj je $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. Sledi

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}} = a = \min\{a, b\}.$$

5. $K \leq \max\{a, b\}$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo $a = \max\{a, b\}$. Tedaj je $a^2 + b^2 \leq 2a^2$. Sledi

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{2a^2}{2}} = a = \max\{a, b\}.$$

Očitno veljajo vse enakosti za $a = b$. □

↪ Sredine dveh števil lahko posplošimo:

$$\begin{aligned} \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} &\leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \\ &\leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \\ &\leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ &\leq \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \end{aligned}$$

kjer so $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitivna števila.

1. Naj bo $x > 0$. Dokaži, da velja

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

(Namig: uporabi neenakost $A \geq G$.)

2. Naj bodo a, b, c pozitivna števila. Dokaži:

(a) $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$

(Namig: uporabi prejšnjo nalogo, kjer $x = \frac{a}{b} = \dots$

(b) $(a + b + c + d)^4 \geq 256abcd$

(c) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$.

(d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$

(e) $\frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{a+b} < \frac{9}{a+b+c}$.

3. Kolesar gre iz kraja A v kraj 1 km oddaljen kraj B s hitrostjo 20 km/h, nazaj pa z avtom s hitrostjo 80 km/h. Ali pride nazaj v kraj A prej kot motorist, ki prevozi isto pot s konstantno hitrostjo 50 km/h?

4. Naj bosta $a, b > 0$ in $a + b = 1$. Dokaži, da velja

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Kdaj velja enakost?

5. Naj bodo a, b, c pozitivna števila in je $abc = 1$. Dokaži:

$$(a+b)(a+c)(b+c) \leq 8.$$

6. Naj bodo $x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Dokaži:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Rešitve nalog.

1.

2.

3.

4. Naj bo $\frac{a}{b} = k$ ter $\frac{a+c}{b+c} = k'$. Ker je $a > b$, je $a + c > b + c$. Ker so a, b, c pozitivni števili in je $a > b$, velja $k > 1$ in $k' > 1$. Sledi

$$a + c = k'(b + c), \Rightarrow \frac{a}{b} = k = k' + \frac{(k' - 1)c}{b}.$$

Uvidimo, da je $\frac{(k'-1)c}{b} > 0$, zato velja $k > k'$.

5. (a) Ker je $(x - y)^2 \geq 0$, velja

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

- (b) Velja $x^2 + y^2 \geq 2xy, x^2 + z^2 \geq 2xz, y^2 + z^2 \geq 2yz$, kar pomeni

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + xz + yz).$$

6. Neenakost lahko zapišemo kot

$$(c - ab)^2 + (b - ac)^2 + (a - bc)^2 \geq 0.$$

Rešitve nalog 2.

1. Ker sta x in $\frac{1}{x} > 0$, uporabimo AG (aritmetično-geometrijsko) neenakost za $a = x, b = \frac{1}{x}$.

$$\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \leq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \right) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

2. (a) Uporabimo prejšnjo nalogo

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + 1 + 1 + \underbrace{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)}_{\geq 2} \geq 9$$

- (b) Iz AG neenakosti za 4 pozitivna števila $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ sledi s potenciranjem in množenjem željena neenakost

$$(a + b + c + d)^4 \geq 256abcd.$$

- (c) Ker velja $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ in $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, je

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \cdot \sqrt[3]{abc} = abc.$$

$$\text{Sledi } \left(\frac{a+b+c}{3}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right) \geq 9abc.$$

- (d) Po AG velja

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} &\leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c}} &\leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} &\leq \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2} \end{aligned}$$

Seštejemo

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} + \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c}} + \sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} &\leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} + \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} &\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

- (e)

3. Ne, povprečna hitrost kolesarja je

$$\bar{v} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{80}} \text{ km/h,}$$

ker je harmonična sredina obeh hitrosti, ki je manjša od aritmetične sredine, ki znaša 50 km/h. Ker je to hitrost motorista, sklepamo, da pride motorist prej.

- 4.

5. Velja

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2}, \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}.$$

Zmnožimo neenakosti ter upotevamo predpostavko:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac} = abc = 1.$$

6. Dokažimo s protislovjem. Recimo, da $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}$ ne drži in velja $x^2 + y^2 + z^2 < \frac{3}{4}$. Teda je $\frac{x^2+y^2+z^2}{3} < \frac{1}{4}$. Po AG neenakosti velja

$$\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} < \frac{1}{4},$$

kar pomeni, da je $\frac{1}{4} \geq \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}$ oziroma $\frac{1}{8} \geq xyz$. V tem primeru velja

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz < \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 1,$$

kar je v protislovju s predpostavko.