

Z netranzitivnostjo v igri kock do "skoraj zanesljive" zmage

Verjetno je odveč omeniti, da v igri dveh poštenih, standardno označenih kock $K_{(1,2,3,4,5,6)}$ pade šestica na prvi kocki z enako verjetnostjo kot šestica na drugi kocki (izmed šest možnosti je natanko ena ugodna). Enako velja za vsako drugo število pik. Taki igri pravimo, da je poštena. Odloča naključje.

Igri z dvema kockama, v kateri pa bi zmagoval le eden, pa bi težko rekli, da je poštena. Najmanj, kar bi lahko zahteval tisti, ki izgublja, je možnost prve izbire. S tem bi navidez prevzel soigralcu njegovo izbiro in bi po na ta način morda zmagal. Kaj pa, če bi skonstruirali igro, v kateri prva izbira nasprotnika v več metih skoraj zagotovo pomeni poraz. Zamislite si igro z dvema kockama, v kateri bi možnost izbire posamezne kocke imel nasprotnik in bi pri tem izgubljal! Ali je to sploh možno? V šahu (ki nima veliko opraviti z naključji) je prva poteza določena prednost. Tudi v nekaterih igrah na srečo je tako. Kdor prej pride, dostikrat prej melje.

Tukaj pa bo prva poteza pomenila skoraj zagotovo poraz.

Vzemimo množico štirih kock, vsako označimo drugače, kar je predstavljeno na mrežah spodaj.

4		3		2		1
0	4	3	3	6	2	5
	4		3		2	1
	4		3		2	5

Slika 1: Kocke $K_{(4,4,4,4,0,0)}$, $K_{(3,3,3,3,3,3)}$, $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ in $K_{(1,1,1,5,5,5)}$

Igra poteka nekako takole: nasprotnik izbere eno izmed štirih kock, mi pa izberemo eno od preostalih treh. Vsak vrže kocko, zmaga tisti, ki vrže več v desetih ali več metih. Pri tem pa lahko nasprotnik po vsakem metu izbere drugo kocko, lahko tudi takšno, ki se je do sedaj pokazala kot najboljša. Kako je to možno?

V taki množici kock namreč velja, da:

- prva kocka $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ 'skoraj zanesljivo' drugo kocko $K_{(3,3,3,3,3,3)}$,
- kocka $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ 'skoraj zanesljivo' kocko $K_{(2,2,2,2,6,6)}$,
- kocka $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ 'skoraj zanesljivo' premaga kocko $K_{(1,1,1,5,5,5)}$,
- in presenetljivo: krog je sklenjen s tem, da kocka $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ 'skoraj zanesljivo' premaga kocko $K_{(4,4,4,4,0,0)}$

Priporočljivo je zapisati vseh 36 možnosti pri metu vsakega izmed parov, kjer ugotovimo, da je razmerje zmag v vsakem primeru 24 : 12, kar pomeni, da je relacija 'skoraj zanesljivo' premaga dejansko dvakrat večja verjetnost zmage.

To pa pomeni, da ta relacija na tej množici ni tranzitivna. Prav neprehodnost relacije pa omogoča igralcu, da s prvo izbiro nasprotnika sam skoraj

zanesljivo zmaga. Če je na primer izbrana kocka $K_{(3,3,3,3,3,3)}$, moramo izbrati $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ in kocka $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ je poražena z dvakrat večjo verjetnostjo. To velja tudi za ostale zapisane pare...

Če pa se število metov veča, je zmaga tistega, ki izbira drugi, toliko verjetnejša - pri desetih metih 2^{10} - krat večja.

Kaj pa, če se nasprotnik odreče možnosti prve izbire?

V primeru, da ugotovi strategijo, so naše vloge in možnosti zamenjane. Bolje je, da igro čimprej končamo. Lahko pa se zgodi, da je pa naši izbiri kocke njegova izbira še vedno naključna. Mora se pač odločiti med preostalimi tremi kockami. Oglejmo si, katera izbira kocke bi nam prinesla največ možnosti za zmago:

- Izberemo $K_{(4,4,4,4,0,0)}$. S to kocko 'skoraj zanesljivo' premagamo $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ (razmerje 2 : 1), tesno izgubimo s $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ (razmerje 4 : 5) ter 'skoraj zanesljivo' izgubimo s $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ (razmerje 1 : 2).
- Če izberemo $K_{(3,3,3,3,3,3)}$, 'skoraj zanesljivo' premagamo $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ (razmerje možnosti 2 : 1), tesno s $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ imamo enake možnosti za zmago, s kocko $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ pa 'skoraj zanesljivo' izgubimo (razmerje 1 : 2).
- Če izberemo $K_{(2,2,2,2,6,6)}$, so možnosti za našo zmago s kocko $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ tesno nam v prid (razmerje 5 : 4), 'skoraj zanesljivo' izgubimo s $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ (razmerje 1 : 2) ter 'skoraj zanesljivo' premagamo $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ (razmerje 2 : 1).
- Če pa izberemo $K_{(1,1,1,5,5,5)}$, smo v podobni situaciji kot pri izbiri kocke $K_{(3,3,3,3,3,3)}$. Enkrat imamo enake možnosti, enkrat 'skoraj zanesljivo' izgubimo (s $K_{(2,2,2,2,6,6)}$), enkrat pa 'skoraj zanesljivo' zmagamo (s $K_{(4,4,4,4,0,0)}$).

Iz celotne obravnave je razvidno, da bi nam ob nepoznavanju strategije nasprotnika najboljše služila kocka $K_{(2,2,2,2,6,6)}$, kocki $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ ter $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ sta verjetnostno nevtralni, medtem ko bi s $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ najverjetneje izgubili.

Naloge

1. Pokaži, da je relacija 'skoraj zanesljivo' premaga na množici kock

$$K_{(3,3,5,5,7,7)}, K_{(2,2,4,4,9,9)}, K_{(1,1,6,6,8,8)}$$

netranzitivna.

- (a) Pokaži, da s prvo izbiro ene izmed kock nasprotnika lahko izberemo eno izmed preostalih dveh kock, s katero imamo večjo verjetnost zmage.
 - (b) Pokaži, da obstaja magični kvadrat velikosti 3, v katerem nastopajo števke, ki določajo števila pik na teh treh kockah.
2. Poišči množico treh kock z lastnostjo netranzitivnosti, ki imajo vsoto pik po vseh ploskvah enako 42.

Rešitve

1. V množici kock

$$K_{(3,3,5,5,7,7)}, K_{(2,2,4,4,9,9)}, K_{(1,1,6,6,8,8)}$$

prva kocka premaga drugo, druga tretjo, ta pa zopet prvo.

- (a) Razmerje verjetnosti, da zmaga boljša kocka, je le 4 : 5.
(b) Števila, ki se pojavijo na kockah lahko razporedimo v magični kvadrat, v katerem je vsota po vrsticah, stolpcih in obeh diagonalah enaka (15).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2. Kocke so $K_{(1,1,1,13,13,13)}, K_{(0,3,3,12,12,12)}, K_{(2,2,2,11,11,14)}$.

Literatura

- [1] Savage Jr., R.P. *The paradox of nontransitive dice. American Mathematical Monthly* 101, Maj 1994, stran 429-436.
[2] Peterson, I. 1997. *Mailbox: Magic dice; Monopoly and contra dancing. Science News Online at*

http://www.sciencenews.org/sn_arc97/12_20_97/mathland.htm