

JENSENOVA NEENAKOST

MATEJ MLAKAR

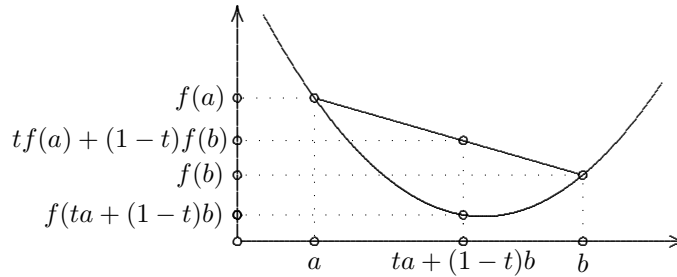
Članek obravnava eno izmed elementarnih neenakosti - Jensenovo neenakost in njen pomen pri reševanju problemov.

Čeprav je Jensenova neenakost dokazljiva z elementarno matematiko, pa ima rojstvo v novejši dobi - 20. stoletju. Jensenova neenakost je pojem, povezan s pojmom konveksnosti (konkavnosti) funkcij.

Definicija 1 *Pravimo, da je realna funkcija f **konveksna** na intervalu I , če in samo če velja*

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (1)$$

za vsak $a, b \in I$ in za $0 \leq t \leq 1$.



Geometrijski pomen (1) je ta, da graf funkcije f leži pod sekanto (izbočenost funkcije navzdol). Podobno definiramo konkavnost:

Definicija 2 *Pravimo, da je realna funkcija f **konkavna** na intervalu I , če in samo če velja*

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (2)$$

za vsak $a, b \in I$ in za $0 \leq t \leq 1$.

Geometrijski pomen (2) je ta, da graf funkcije f leži nad sekanto (izbočenost funkcije navzgor). Hitro opazimo naslednjo lastnost funkcije:

Lema 1 *Funkcija f je konveksna natanko tedaj, ko je $-f$ konkavna.*

Dokaz je prepuščen bralcu, upoštevamo (1) in (2); trivialno. Večina se s pojmom konveksnosti (konkavnosti) sreča prvič ob vpeljavi odvoda, kjer se privzame:

$$f''(x) \geq 0 \text{ za vsak } x \in I \Rightarrow f \text{ je konveksna.}$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ za vsak } x \in I \Rightarrow f \text{ je konkavna.}^1$$

Neenakost (1) za konveksne funkcije lahko posplošimo na tri spremenljivke x_1, x_2, x_3 z intervala I . Izberemo si realna števila t_1, t_2, t_3 z lastnostjo $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Od tod sledi $t_2 + t_3 = 1 - t_1$. Problem treh spremenljivk preoblikujemo na problem dveh spremenljivk na naslednji način:

¹strogo konveksnost oziroma strogo konkavnost določimo s strogim neenačajem

$$\begin{aligned}
 f(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3) &= f\left(t_1x_1 + (1-t_1)\frac{t_2x_2 + t_3x_3}{t_2 + t_3}\right) \\
 &\leq t_1f(x_1) + (1-t_1)f\left(\frac{t_2x_2 + t_3x_3}{t_2 + t_3}\right) \\
 &= t_1f(x_1) + (1-t_1)f\left(\frac{t_2}{t_2 + t_3}x_2 + \frac{t_3}{t_2 + t_3}x_3\right) \\
 &\leq t_1f(x_1) + (t_2 + t_3)\left(\frac{t_2}{t_2 + t_3}f(x_2) + \frac{t_3}{t_2 + t_3}f(x_3)\right) \\
 &= t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + t_3f(x_3)
 \end{aligned}$$

Z indukcijo na n spremenljivk lahko neenakost posplošimo. To je storil J.L.W.V.Jensen leta 1906.

Izrek 1 (Jensenova neenakost, 1906) Naj bo f konveksna funkcija na intervalu I . Če $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ in za nenegativna števila $t_1, t_2, \dots, t_n$ velja $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, potem velja

$$\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i). \quad (3)$$

Dokažemo z indukcijo po n . Predpostavimo da velja za n , pokažimo za $n+1$:

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i + t_{n+1}x_{n+1}\right) \\
 &\leq t_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-t_{n+1})f\left(\frac{1}{1-t_{n+1}}\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \\
 &= t_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-t_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1-t_{n+1}}x_i\right) \\
 &\leq t_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-t_{n+1})\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1-t_{n+1}}f(x_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i). \quad \square
 \end{aligned}$$

S tem smo pokazali veljavnost za vsa naravna števila.

Hitro ogotovimo, da je v Jensenovi neenakosti je dosežen enačaj, če so vse vrednosti x_i enake. Tedaj je leva stran enaka

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = f\left(\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)x\right) = f(x),$$

desna stran pa

$$\sum_{i=1}^n t_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n t_i f(x) = f(x) \sum_{i=1}^n t_i = f(x).$$

Uporaba Jensenove neenakosti

Primer 1 (Matematična olimpiada Kanade, 1995) Naj bodo $a, b, c > 0$. Tedaj velja

$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

Dokaz 1 Ker sta izraza za poljubno izbiro vrednosti a, b, c pozitivna, ju lahko logaritmiramo in dobimo

$$\ln(a^a \cdot b^b \cdot c^c) \geq \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c},$$

oziroma

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq (a + b + c) \ln \left(\frac{a + b + c}{3} \right). \quad (\star)$$

Naj bo $f(x) = x \ln x$, $x \in (0, \infty)$. Funkcija f je konveksna na $(0, \infty)$; ker velja $f''(x) = 1/x$; z Jensenovo neenakostjo za konveksne funkcije treh spremenljivk pa sledi

$$\begin{aligned} \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} &\geq f\left(\frac{a + b + c}{3}\right) \\ \frac{a \ln a + b \ln b + c \ln c}{3} &\geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right) \ln \left(\frac{a + b + c}{3}\right). \end{aligned}$$

Pomnožimo s 3 in dobimo neenakost $(\star)$, kar iščemo.

Primer 2 Naj bosta a, b realni števili, za kateri velja $a + b = 2$. Potem sledi

$$(1 + \sqrt[5]{a})^5 + (1 + \sqrt[5]{b})^5 \leq 2^6$$

Dokaz 2 Definirajmo funkcijo $f(x) = (1 + \sqrt[5]{x})^5$. Ker je f konveksna funkcija, velja po (3)

$$2\left(1 + \sqrt[5]{\frac{a+b}{2}}\right)^5 \geq (1 + \sqrt[5]{a})^5 + (1 + \sqrt[5]{b})^5$$

Če upoštevamo $a + b = 2$ sledi željena neenakost. Enakost je dosežena za $a = b = 1$. $\square$

Primer 3 Naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$. Tedaj velja

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + a_k} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}.$$

Dokaz 3 Definirajmo funkcijo $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$, $x \in [0, \infty)$. Funkcija je konveksna, saj velja $f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} > 0$ na intervalu $(0, \infty)$. Uporabimo izrek 1 in

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{x_k}} \geq \frac{n}{1 + e^{\sum_{k=1}^n x_k}}.$$

Sedaj naj bo $x_k = \ln a_k$, kjer je $k = 1, \dots, n$. Odtod sledi željena neenakost. $\square$

Posplošena aritmetično-geometrijska neenakost

Pojem aritmetične sredine in geometrijske sredine je pogost v svetu elementarne matematike. Aritmetično-geometrijsko neenakost nenegativnih števil a in b

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (4)$$

zlahka dokažemo na naslednji način:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Manj znana pa je posplošena aritmetično-geometrijska neenakost, ki jo strnimo v naslednji izrek.

Izrek 2 (posplošena AG neenakost) Naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ter $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$ in je $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$. Potem velja

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n \geq x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}. \quad (5)$$

Dokaz:

Hitro opazimo, da:

- za enake vrednosti uteži $t_1 = t_2 = \dots = t_n$ dobimo

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

kar je posplošitev neenakosti (4) za n nenegativnih števil.

- v (5) velja enačaja, če je $x_1 = \dots = x_n$.

Izrek dokazemo s pomočjo Jensenove neenakosti, kjer za nenegativne argumente $x_1, \dots, x_n \leq 0$ izberemo funkcijo $f(x) = \ln x$. Ker je f konkavna ($f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ na $(0, \infty)$), velja Jensenova neenakost za konveksno funkcijo $-f$:

$$\begin{aligned} f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) &\geq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n) \\ \ln(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) &\geq t_1 \ln(x_1) + t_2 \ln(x_2) + \dots + t_n \ln(x_n) \\ &= \ln(x_1)^{t_1} + \ln(x_2)^{t_2} + \dots + \ln(x_n)^{t_n} \\ &= \ln(x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot \dots \cdot x_n^{t_n}) \end{aligned}$$

Ker je f strogo naraščajoča ($f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ na $(0, \infty)$), sledi

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n \geq x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \quad \square$$

Z (5) zlahka rešimo naloge, za katere sicer potrebujemo kar nekaj truda, da jih uženemo.

Primer 4 Naj bodo a, b, c nenegativna števila. Pokaži, da je

1. $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b \geq \sqrt[3]{a \cdot b^2}$
2. $\frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c \geq \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt{c}$

Dokaz 4 Dokaza temeljita na neposredni uporabi posplošene aritmetično-geometrijske neenakosti.

Primer 5 (St. Petersburg, Matematična olimpiada Rusije 1997) Naj bodo $x, y, z \geq 2$. Potem velja

$$(y^3 + x)(z^3 + y)(x^3 + z) \geq 125xyz$$

Dokaz 5 Očitno je $(y^3 + x)(z^3 + y)(x^3 + z) \geq (4y + x)(4z + y)(4x + z)$. Po (5) sledi $\frac{4y}{5} + \frac{x}{5} \geq \sqrt[5]{y^4 x}$ oziroma

$$4y + x \geq 5 \sqrt[5]{y^4 x}.$$

Podobno $4z + y \geq 5 \sqrt[5]{z^4 y}$, $4x + z \geq 5 \sqrt[5]{x^4 z}$.

Če zmnožimo, dobimo $(4y + x)(4z + y)(4x + z) \geq 125xyz$, od koder sledi željena neenakost. $\square$

Primer 6 (Matematična olimpiada Velike Britanije, 1997) Naj bodo a, b, c, d pozitivna realna števila. Potem obstaja natanko ena rešitev, ki reši sistem enačb

$$a + b + c + d = 12$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = abcd.$$

Dokaz 6 Ker velja $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$, sledi

$$abcd \leq \left(\frac{12}{4}\right)^4 = 81$$

(neenakost drži le v primeru, da je $a = b = c = d = 3$). Po (5) velja

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}ab + \frac{1}{6}ac + \frac{1}{6}ad + \frac{1}{6}bc + \frac{1}{6}bd + \frac{1}{6}cd &\geq \\ &\geq (ab)^{\frac{1}{6}} \cdot (ac)^{\frac{1}{6}} \cdot (ad)^{\frac{1}{6}} \cdot (bc)^{\frac{1}{6}} \cdot (bd)^{\frac{1}{6}} \cdot (cd)^{\frac{1}{6}} = \\ &= (abcd)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

oziroma

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 6(abcd)^{\frac{1}{2}}.$$

Drugo enačbo iz sistema lahko zapišemo kot

$$abcd \geq 27 + 6(abcd)^{\frac{1}{2}}.$$

Naj bo $x^2 = abcd$. Kvadratna enačba

$$x^2 - 6x - 27 \geq 0$$

ima rešitvi na poltrakah $x \geq 9$ in $x \leq -3$. Zaradi pozitivnosti a, b, c, d drugo možnost zanemarimo. Sledi $(abcd)^{\frac{1}{2}} \geq 9$ oziroma $abcd \geq 81$. Odtod sklepamo, da je edina možnost, da dobimo rešitve, če je $abcd = 81$. Že zgoraj pa smo ugotovili, da je to v primeru, ko je $a = b = c = d = 3$, kar je tudi edina rešitev. $\square$

Primer 7 Naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Če $a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} = 1$, potem velja

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \frac{1}{\lambda_1^{\lambda_1} \cdot \lambda_2^{\lambda_2} \dots \lambda_n^{\lambda_n}}$$

Dokaz 7 Po posplošeni aritmetično-geometrijski neenakosti je

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \lambda_1 \left(\frac{a_1}{\lambda_1}\right) + \lambda_2 \left(\frac{a_2}{\lambda_2}\right) + \dots + \lambda_n \left(\frac{a_n}{\lambda_n}\right) \geq \\ &\geq \left(\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^{\lambda_1} \cdot \left(\frac{a_2}{\lambda_2}\right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{a_n}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_1^{\lambda_1} \dots \lambda_n^{\lambda_n}}. \quad \square \end{aligned}$$

Literatura

- [1] D. S. Mitrinović: *Elementary inequalities*, P.Noordhoff LTD - Groningen, 1964.
- [2] Richard Hoshimo: *The other side of inequalities in Five parts*. Mathematical Mayhem, Volume 7, 1995.
- [3] Tristan Needham: *The visual explanation of Jensen inequality*. The Americal Mathematical Monthly, MAA, October, 1993.
- [4] Kazarinov: *Geometric inequalities*. Mathematical Asociation of America, 1961.
- [5] T. Rike: *Triangles and inequalities*. Barkeley Math Circle, 1999.