

Kombinatorika in geometrija

1. IMAMO n KROŽNIC ZA KATERE VELJA, DA VSAKA KROŽNICA SEKA PREOSTALE KROŽNICE. KOLIKO JE PRESEČIŠČ MED KROŽNICAMI?

Rešitev:

- $n = 1$: Opazimo, da presečišč ni.
- $n = 2$: Imamo dve presečišči.
- $n = 3$: Tri krožnice se lahko sekajo v največ 6 točkah, itd...

Izoblikujmo induksijsko predpostavko. Naj bo p_n število presečišč n krožnic. Predpostavimo

$$\begin{aligned} p_n &= 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2(n-1) \\ &= 2(1 + \dots + (n-1)) = 2 \frac{(n-1)n}{2} = (n-1)n \end{aligned}$$

in to dokažimo.

Indukcijski korak $n \rightarrow n+1$:

če imamo n krožnic, potem krožnica K_{n+1} preseka vsako izmed $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ natanko dvakrat. Dobimo $2n$ presečišč. Sledi

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + 2n = (n-1)n + 2n = \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

kar je natanko tisto, kar smo želeli pokazati.

2. V RAVNINI IMAMO n PAROMA NEVZPOREDNIH PREMICE, ZA KATERE VELJA, DA NE OBSTAJA SKUPNO PRESEČIŠČE TREH ALI VEČ PREMICE.. KOLIKO JE PRESEČIŠČ MED PREMICAMI?

Rešitev: Poglejmo, koliko je presečišč za manjše število premic in oblikujmo induksijsko predpostavko. Dogovorimo se, da bomo z p_n označevali število presečišč med n premicami.

Hitro ugotovimo, da je $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 3, p_4 = 6$.

Oblikujmo induksijsko predpostavko

$$p_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

ki ga dokažemos induksijskim korakom.

Indukcijski korak $n \rightarrow n+1$:

Če imamo n premic, se $n+1$ premica seka z preostalimi v n točkah. Od tod sledi

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + n = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

kar smo želeli pokazati.

3. NA TREH DALJICAH, KI OBLIKUJEJO TRIKOTNIK, SE NAHAJA 3, 4, 5 TOČK (KRAJIŠČA SO ŠTETA DVAKRAT). KOLIKO TRIKOTNIKOV DOLOČAJO TE TOČKE?

Rešitev:

Naloge se lahko lotimo na več načinov. Opišimo enega. Označimo z T_n število trikotnikov, ki jih dobimo iz n točk, za katere velja, da so po tri nekolinearne, z L_n označimo število načinov, na koliko lahko izberemo tri elemente izmed n elementov, z $I_n^{p,t,k}$ pa število izrojenih trikotnikov (tistih, ki nimajo ploščine), kjer števila p, t in k označunajo ustrezno število skupaj kolinearnih točk. Očitno velja

$$T_n = L_n - I_n^{p,t,k}.$$

Število L_n ni težko določiti. To je namreč kar definicija za število kombinacij brez ponavljanja n elementov reda 3. $L_n = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$.

Število I_n pa določimo na naslednji način. Število izrojenih trikotnikov, ki jih dobimo na prvi daljici, kjer imamo 3 točke, je enako številu $\binom{3}{3} = 1$, število izrojenih trikotnikov na drugi daljici, kjer imamo 4 točke, je enako številu $\binom{4}{3} = 4$, število izrojenih trikotnikov na tretji daljici, kjer imamo 5 točk, je enako številu $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Odtod sledi, da je $I_{12} = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 15$.

Število pravih, neizrojenih trikotnikov je potemtakem $T_{12} = L_{12} - I_{12}^{3,4,5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} - 15 = 220 - 15 = 205$.

Naredimo se splošen sklep:

$$T_n = L_n - I_n^{p,t,k} = \binom{n}{3} - \left(\binom{p}{3} + \binom{t}{3} + \binom{k}{3} \right),$$

kjer je $p + t + k = n + 3$.

Zadnja formula poda odgovor na naslednji problem: Na treh daljicah, ki oblikujejo trikotnik, se nahaja p, t, k točk (krajišča so šteta dvakrat).

Koliko trikotnikov določajo točke na teh treh daljicah?

Preverimo še za nekaj enostavnih primerov:

$p = 2, t = 2, k = 2$, kar pomeni trikotnik s tremi oglišči. Takoj sledi, da je $n = 3$. Glede na izračunano sledi

$$T_3 = L_3 - I_3^{2,2,2} = \binom{3}{3} - \left(\binom{2}{3} + \binom{2}{3} + \binom{2}{3} \right) = 1$$

$p = 4, t = 2, k = 2 \rightarrow n = 8 - 3 = 5$.

$$T_5 = L_5 - I_5^{4,2,2} = \binom{5}{3} - \left(\binom{4}{3} + \binom{2}{3} + \binom{2}{3} \right) = 10 - 4 = 6$$

4. KOLIKO JE KOLINEARNIH PRESEČIŠČ PREMICE IZ 2. NALOGE?

Brez škode za splošnost lahko vzamimo premico p_1 . Seka jo natanko $n - 1$ preostalih premic. Torej je vseh kolinearnih presečišč na p_1 -ti premici $n - 1$.

KOLIKO TRIKOTNIKOV LAHKO TVORIMO IZ TEH PRESEČIŠČ?

Iz prejšnje naloge lahko sklepamo naslednje:

Število vseh trikotnikov T_n je enako številu L_n , od katerega moramo odšteti še število vseh izrojenih trikotnikov na n daljicah, kjer so $p_1, p_2, \dots, p_n$ števila skupaj kolinearnih točk, kar v skladu z definicijo zgoraj označimo z $I_n^{p_1, p_2, \dots, p_n}$.

$$T_n = L_n - I_n^{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n} = \binom{n}{3} - \left(\binom{p_1}{3} + \binom{p_2}{3} + \dots + \binom{p_n}{3} \right),$$

kjer je $p_1 + p_2 + \dots + p_n = n + n = 2n$ (vsaka točka je šteta dvakrat, je namreč presečišče dve daljici).

Naloga: Koliko trikotnikov tvorijo presečišča $n = 4$ premic, če so vse premice paroma nevzporedne?

Iz formule sledi $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 3$ (vsaka premica seka preostale 3) in $n = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{2} = 6$ (vseh presečišč je 6). Sledi

$$T_6 = L_6 - I_6^{3,3,3,3} = \binom{6}{3} - \left(\binom{3}{3} + \binom{3}{3} + \binom{3}{3} + \binom{3}{3} \right) = 16.$$

Posplošimo problem na štirikotnike, n -kotnike...