

Linearne Diofantske enačbe

Definicija 1 Linearna diofantska enačba dveh spremenljivk je enačba oblike

$$ax + by = c, \quad \text{kjer so } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

in ima rešitve (x, y) v množici celih števil.

Dejansko rešujemo problem, kako poiskati vse pare celih števil (x, y) , ki zadoščajo zvezi $ax + by + c = 0$.

Za motivacijo si zastavimo nekaj *problemov*:

1. Poišči vse celoštevilске rešitve (x, y) , ki zadoščajo $127x - 52y = -2$.
2. Ali obstajajo kake točke s celoštevilskimi koordinatami, ki ležijo na premici $6x + 3y = 5$.
3. Določi števila, ki imajo to lastnost, da ko jim prištejemo vsoto števk, dobimo 62.

S pomočjo *problema 1* podajmo *recept*, kako rešiti tako enačbo.

Problem 1: Poišči vse celoštevilске rešitve enačbe

$$127x - 52y = -2.$$

- zapišemo Evklidov algoritem za števili a in b , torej za 127 in 52.

$$127 = 2 \cdot 52 + 23$$

$$52 = 2 \cdot 23 + 6$$

$$23 = 3 \cdot 6 + 5$$

$$6 = 1 \cdot 5 + \boxed{1}$$

$$5 = 5 \cdot 1 + 0 \Rightarrow D(127, 52) = 1.$$

- izrazimo največji skupni delitelj števil a in b z linearno kombinacijo števil $a = 127$ in $b = 52$ tako, da postopoma izražamo ostanke:

$$23 = 127 - 2 \cdot 52$$

$$6 = 52 - 2 \cdot 23 = 52 - 2(127 - 2 \cdot 52) = 5 \cdot 52 - 2 \cdot 127$$

$$5 = 23 - 3 \cdot 6 = 127 - 2 \cdot 52 - 3(5 \cdot 52 - 2 \cdot 127) = \dots = 7 \cdot 127 - 17 \cdot 52$$

$$1 = 6 - 5 = 5 \cdot 52 - 2 \cdot 127 - (7 \cdot 127 - 17 \cdot 52) = 22 \cdot 52 - 9 \cdot 127$$

Ugotovili smo (zadnja vrstica), da velja

$$127 \cdot (-9) - 52(-22) = 1$$

Če enačbo pomnožimo z -2 , dobimo

$$127 \cdot 18 - 52 \cdot 44 = -2.$$

Vidimo, da je celoštevilski par $(18, 44)$ rešitev enačbe $127x - 52y = -2$.

Opomba: opazimo lahko, da v primeru,

$D(a, b)$ ne deli c natanko tedaj, ko enačba $ax + by = c$ ni rešljiva
v celih številih.

Na primer: $3x + 6y = 1$ nima celoštevilskih rešitev.

- Kako pa poiščemo vse ostale celoštevilске pare?

Splošno rešitev dobimo z obrazcem:

$$(x, y) = \left(x_0 - \frac{kb}{D(a, b)}, y_0 + \frac{ka}{D(a, b)} \right),$$

kjer je (x_0, y_0) že znana (partikularna) rešitev, $k \in \mathbb{Z}$.

V našem primeru je to

$$(x, y) = (18 + 52k, y_0 + 44 + 127k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Problem 2: Rešiti je potrebno linearno diofantsko enačbo $6x + 3y = 5$.

Opazimo lahko, da je $D(6, 3) = 3$, Ker $D(6, 3) = 3$ ne deli 5, rešitev nima celoštevilskih rešitev.

Problem 3: Številu xy prištejemo vsoto števk $x + y$ ter dobimo:

$$(10x + y) + (x + y) = 11x + 2y = 62.$$

Osnovna rešitev diofantske enačbe (x_0, y_0) je po izpeljavi $(62, -310)$. Splošna rešitev pa je $(x, y) = (62 - 2k, -310 + 11k)$. Ker pa sta x in y števki, velja

$$0 < 62 - 2k < 10, \quad 0 < -310 + 11k < 10.$$

Edini celi k , ki ustreza obema pogojem, pa je $k = 9$.

Odtod sledi $x = 62 - 2 \cdot 9 = 4, y = -310 + 11 \cdot 9 = 9$. Iskano število je 49.

Naloge

1. Poišči celoštevilске rešitve enačbe:

(a) $15x + 7y = 111$ Rešitev: $(x, y) = (111 - 7k, -222 + 15k), k \in \mathbb{Z}$

(b) $93x + 43y = 3$ Rešitev: $(x, y) = (5 - 14k, -11 + 31k), k \in \mathbb{Z}$

(c) $93x + 43y = 15$ Rešitev: $(x, y) = (25 - 14k, -55 + 31k), k \in \mathbb{Z}$

2. Poišči vse naravne rešitve enačb:

(a) $5x + 3y = 52$ Rešitev: $(2, 14), (5, 9), (8, 4)$

(b) $123x + 57y = 531$ Rešitev: $(2, 5)$

(c) $12x + 50y = 1$ Rešitev: $\emptyset$

3. Pokaži, da v primeru, ko sta x in y tuji si števili, obstajata celi števili a in b , da velja

$$ax + by = 1.$$

4. Na tekmovanju iz matematike je bilo 140 dijakov. Organizator tekmovanja je za vsakega tekmovalca pripravil po eden sok. Sokovi so bili v paketih po 16, 17 ali 40 steklenic. Koliko je bilo posameznih paketov? Rešitev: 2 paketa po 16 sokov, 4 pakete po 17 sokov, 1 paket po 40 sokov.