

Gimnazija Kranj



Gimnazija Kranj

RAZMERJA MED PENROSEOVIMI PLOŠČICAMI

Avtorji:

Anže Mediževac, 3. f

Timotej Štempihar, 3. f

Andraž Dolinšek, 3. f

Mentor:

dr. Jure Žalohar

Kranj, 2015

KAZALO SLIK

Slika 1: Penrosove ploščice sestavljene iz pet kotnikov	8
Slika 2: Robinsonove ploščice	8
Slika 3: Osnovni aperiodični romboidni ploščici	9
Slika 4: Romboidne Penrosove ploščice	9
Slika 5: Osnovne Penrosove ploščice	10
Slika 6: "Kite" in "Dart" ploščice z oznakami kotov	11
Slika 7: Načini povezovanja "kite" in "dart" ploščic	11
Slika 8: Motiv romba	13
Slika 9: Osredotočeni motiv zelene zvezde	13
Slika 10: Zvezde z deset kotniki	13
Slika 11: Spiralni zmaj	14
Slika 12: Modre zvezde	14
Slika 13: Pet kotniki z zvezdami in rombi	14
Slika 14: Sonce	14
Slika 15: Osnovnica trikotnika	15
Slika 16: Diagonala romba	15
Slika 17: Zelena zvezda	16
Slika 18: Trikotniki v deset kotniku	17
Slika 19: Dvojni trikotnik, tudi lahko del zvezde	17
Slika 20: Delitev dvojnih trikotnikov	18
Slika 21: Meritev polmera deset kotnika	18
Slika 22: Meritve dvojnih trikotnikov	19
Slika 23: Meritev polmera deset kotnika	19
Slika 24: Delitev pet kotnika in polovične zvezde	20
Slika 25: Romb, deljen na 2 trikotnika	20
Slika 26: Razcepljanje rombov	21
Slika 27: Merjenje dolžin osnovnic trikotnikov	21
Slika 28: Prepleteni rombi	24
Slika 29: Nastajanje motiva 1 iz središča	24
Slika 30: Nastajanje motiva 2 iz središča	24
Slika 31: Iskanje središča in meritve le-tega	25
Slika 32: Povezovanje in nastajanje motiva Prepletenih rombov	26
Slika 33: Povezovanje motiva Prepletenih rombov	26
Slika 34: Analiza motiva Nastajanje motiva 1 iz središča	27
Slika 35: Meritve na 2. motivu nastajanja	29
Slika 36: Večje širitve motivov V nastajanju	30

Povzetek

Področje naše raziskovalne naloge je tako imenovan »Penrose tiling«, oziroma vzorec Penroseovih ploščic. Gre za set aperiodičnih ploščic, katerih glavna značilnost je, da se vzorčno ponavljajo v vedno večjem obsegu ter so tako zrcalno kot rotacijsko simetrične. V osnovi gre za neperiodičen kristal oziroma tako imenovan kvazikristal (quasy-crystal). Naša raziskovalna naloga se osredotoča na razmerja med stranicami v vzorcu Penrose, ki se naj bi pojavljala v naravi. Naš cilj je ugotoviti, koliko omenjena razmerja znašajo in v kakšnih kombinacijah se pojavljajo. Znano nam je, da določene razmerja predstavljajo vrednost zlatega reza in njegovega kvadrata (φ)².

Domnevamo, da se v samem vzorcu pojavljajo tudi drugačna razmerja in da je ta mogoče ustrezno izmeriti ter izračunati. Naš cilj je z merjenjem razmerij v različnih kombinacijah Penroseovih ploščic ugotoviti, kakšna naj bi ta razmerja bila, jih opredeliti in tako morebiti potrditi našo hipotezo.

Abstract

The field of our research is the so-called Penrose tiling, which tends to appear in crystal forms in the Earth's crust. It is a set of aperiodic tiles and their main feature is to repeat themselves in a constantly bigger scale. They are reflective as well as rotational symmetric. Basically it's a so-called quasi-crystal. It means that it can possess specific features. Our research is focused on the ratio between the Penrose tile's sides, which are said to appear in nature. Our goal is to find out, how much these mentioned ratios add up to, and in which combinations they appear. It is known to us that some ratios represent the golden ratio's values and its square.

We suspect that there are other ratios, which are measurable and calculable. We tend to find out these and their scale in various combinations by measuring the Penrose tiling of each and, if possible, to approve our hypothesis.

Uvod

Namen raziskovanja

Namen našega raziskovanja je ugotoviti, koliko razmerij se pojavlja med stranicami v določenih modelih Penroseovih ploščič, kolikšna je njihova velikost in kako to vpliva na zaporedje likov, ki sestavljajo model. V kasnejšem raziskovanju ([Analizirani primeri 2](#)) nas bo zanimalo tudi razmerje med stopnjami širitve motiva. Želimo ugotoviti, ali obstaja posebno še neodkrito razmerje in kakšne so oblike njegovega pojavljanja, kateri pogoji zadostujejo za njegov pojav ter pomen v naravi.

Način raziskovanja 1

Za raziskovanje bomo uporabili naslednji matematično-grafične program: Inkscape (demo verzija), Corel draw (demo verzija). Odločili smo se podrobno analizirati sedem osnovnih pojavnih oblik Penroseovih ploščič. Vsako posebej bomo najprej vstavili v prej naštete programe ter odčitali vsako dolžino stranice likov, ki se pojavljajo v njej. Nato se bomo osredotočili na robne ter na tiste like, ki so oddaljeni za več kot dve kombinaciji trikotnika in romba. Prav tako bomo analizirali dolžine in razmerja stranic vseh vmesnih likov in tako poskušali razbrati razmerje, v katerem se pojavljajo. Postopek bomo ponovili v vseh osmih smereh neba in tako dobili celovito sliko razmerij v modelu. Dobljena razmerja bomo primerjali z že znanimi, ki se domnevno pojavljajo v naravi poleg zlatega reza. Postopek bomo ponovili na vseh sedmih modelih.

Za končno razmerje bomo uporabili diagonale rombov, ki tvorijo osnovnice enakokrakih trikotnikov. Vse rombe, tako večje kot tudi srednje velike in male, bomo namreč razcepili na dva enakokraka trikotnika. Osnovnici, kateri bomo pridobili z razcepom večjega in manjšega romba, bomo primerjali med seboj. Izračunali bomo njuno razmerje in ga primerjali z znanimi vrednostmi zlatega reza, polovičnega zlatega reza ter zlatega reza na kvadrat. Ta postopek bomo uporabili za like v vse smeri. Za dolžino nejasnih stranic nam bo v pomoč program Corel draw, medtem ko bomo s pomočjo Inkscapea odčitali smer likov v modelu tako, da ne bomo zašli s prave poti. S pomočjo Inkscapea bomo izmerili večinoma vse stranice v modelih.

Na koncu bomo strnili vse podatke, ki smo jih izluščili iz izbranega modela ter jih združili in preračunali, pri tem pa uporabljali program Wolfram Alpha. Vseh sedem modelov bo deležnih enake obravnave in analize.

Način raziskovanja 2

V pomoč pri drugem delu naše raziskave nam bosta računalniški program Inkscape in matematični program Wolfram Alpha. Ker so motivi, obravnavani v tem delu naloge, drugačni od začete sedmerice, bodo deležni tudi drugačne analize. Zaradi njihovih značilnosti (podrobno opisane v poglavju [Analizirani primeri 2](#)) prejšnji omenjen postopek v celoti ne bo mogoč oz. potrebna bo dodatna in drugačna analiza, s prvinami prvotne. Namesto samega merjenja stranic in diagonal smo tukaj dodali še merjenje obsegov ter primerjavo le-teh med seboj.

V primeru Motiva prepletenih rombov bomo meritve pričeli v kotih vzorca in nadaljevali proti notranjosti. Meritve stranic in obsegov bomo izvajali v programu Inkscape, razmerja teh pa dokončno izračunavali s pomočjo programa Wolfram Alpha. Izpuščeno ne bo merjenje diagonal vseh različnih likov, razpolavljanja likov na trikotnike ter analiziranje le-teh. Če bo potrebno bomo posamezne rombe tudi ločili na trikotnike in si s tem zagotovili preglednejšo sliko in jasno pot obravnave.

Naslednja vzorca sta ti. Motiva v nastajanju. Merjenja bomo pričeli v sredini vzorca, točno v prikazani črni točki. Nadaljevali bomo v smeri širitve rombov, postopoma po stopnjah. Vsaka stopnja bo preučena na tak način, da bomo izmerili obseg likov in obseg same širitve. Primerjava obsegov nam bo podala razmerje, ki se pojavlja v teh vzorcih, medtem ko primerjava obsega širitve da število, ki množi prvotno oz. prejšnjo stopnjo širitve. Tudi tu ne bo izpuščeno merjenje diagonal vseh različnih likov, razpolavljanja likov na trikotnike ter analiziranje le-teh. Vse meritve dolžin bomo opravljali v programu Inkscape, Wolfram Alpha pa bo služil kot pomoč pri izračunavanju razmerij in ostalih potrebnih podatkov.

Teoretske osnove problema

Znano je, da se v Penroseovih motivih pojavlja zlati rez in sicer v trikotnikih, katerih koti merijo 36 in 108 stopinj. V vseh pravih motivih, kjer sodelujejo trikotniki različnih velikosti, se prav tako zaznava razmerje zlatega reza. Celotna struktura sovпада z načeli širjenja, začeni na sredini, od koder se razprostira navzven in sicer v vse smeri nebi na dani osnovni ravnini. Pravi motivi so tisti, katerih sestavni deli so kvazikristali.

Hipoteza

Predvidevamo, da se v modelih oz. vsaj v določenih pojavlja razmerje, ki še ni opisano. Novo razmerje bi morda ustvarilo nov vpogled v sistem Penroseovih ploščič, posledično pa tudi v naravo, kjer se pojavlja. V kolikor odkrijemo tako razmerje, ki se ne ujema z doslej že znanimi, bomo potrdili našo hipotezo.

Teoretični del naloge

Rezultati dosedanjih raziskav

Na tem področju sta raziskovala samo Peter J. Lu in Paul J. Steinhardt. Njuno delo obsega analizo pojava vzorca Penrose v srednjeveški islamski arhitekturi. Konkretno z našim problemom pa se v toku časa še ni ukvarjal nihče. Zato, ker se nam je tema zdela izredno zanimiva, smo se odločili za raziskavo razmerij v modelih Penroseovih ploščic. Če nam uspe dokazati še neznano razmerje, se bodo zagotovo pojavila nova vprašanja o naravi in njenem delovanju. Mi smo prvi.

Problem v literaturi

Ko pomislimo na Penrosove ploščice in kako so te zaznamovane v literaturi, katere osrednja tema so le te, bi pomislili, da bi se najprej pojavile v prvih zapisih Rogerja Penrosa odkritelja Penrosovih ploščic. Vendar se je znanje o vzorcih Penrosovih ploščic pojavilo že veliko prej.

Prvi pojav znanja o Penrosovih ploščicah se je pojavil že v antičnih islamskih državah. To znanje je bilo uporabljeno pri okraševanju tedanjih verskih objektov in drugih svetih zgradb. In ravno pojavu Penrosovih ploščic v islamski arhitekturi in razmerij s katerimi nastanejo, se je posvetil Peter J. Lu v svojem članku za revijo Science z naslovom »Decagonal and Quasi-crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture«. V svojem članku opiše, kako so lahko že v antičnih arabskih državah uporabljali ne samo vzorčenje s kompasom in ravnilom, ampak so se posluževali tudi naprednejših tehnik vzorčenja bolj zapletenih vzorcev z relativno preprostimi geometričnimi tehnikami. Tako je prišel tudi do odkritja, da so arhitekti takrat že poznali potrebna razmerja med stranicami sestavnih delov Penrosovih ploščic, da so lahko sestavljali zapletene vzorce le teh na večjih površinah.

V literaturi pa je kot ena večjih zanimivosti razmerij v Penrosovih ploščicah omenjen zlati rez. Ta je eno od prvih razmerij, s katerim se bomo ukvarjali pri naši raziskovalni nalogi in na podlagi opazovanj poskušali določiti tudi druga razmerja. Ta se v literaturi o Penrosovih ploščicah pojavlja zelo pogosto, saj je ključen za njihovo sestavo.

»Več značilnosti in skupnih lastnosti, ki se pojavljajo v Penrosovih ploščicah je povezanih z zlatim rezom $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ (Približno 1.618).« (Grünbaum & Shephard, 1987, str. 537– 547). Poleg zlatega reza se v literaturi, uporabljeni v namen te seminarske naloge, ne zasledi pojava kakšnih drugih razmerij, zato je ključni praktični del seminarske naloge, ki bo podal več trdnosti nadaljnji teoretični razlagi.

Zagotovitvi te trdnosti pa bomo zadostili z večplastnim preverjanjem in dokazovanjem do zdaj še ne-odkritih razmerij v Penrosovih ploščicah s praktičnimi metodami dela. Ker je razmerje zlatega reza v Penrosovih ploščicah že pretežno opisano v literaturi, bomo razmerje zlatega reza raziskovali praktično z eksperimentom in teoretično po literaturi.

Bodoča še ne opisana razmerja pa bomo poskušali odkriti s praktičnim delom z uporabo matematično-grafičnega programa Inkscape, ki nam omogoča vektorsko obravnavo vzorcev,

ki jih hočemo pregledati. Uporabili bomo tudi program Wolfram Alpha, s katerim bomo natančneje analizirali pojavne oblike teh vzorcev. Vzorci, ki jih bomo analizirali v praktičnem delu naloge, so sledeči: Rombi, Motiv Romba, Zvezde, Osredotočeni motiv zvezde, Zvezde z osem kotniki, Spiralni zmaj, Zvezde in Pet kotniki z zvezdami in rombi. Po natančni meritvi vseh potrebnih podatkov pa bomo v skladu z iskano hipotezo preverili vse možnosti, ki bi lahko kazale na pojav novega razmerja, in tako postavili nov temelj za raziskovanje mogoče še drugih ne odkritih razmerij, ali pa ovrgli hipotezo.

Viri:

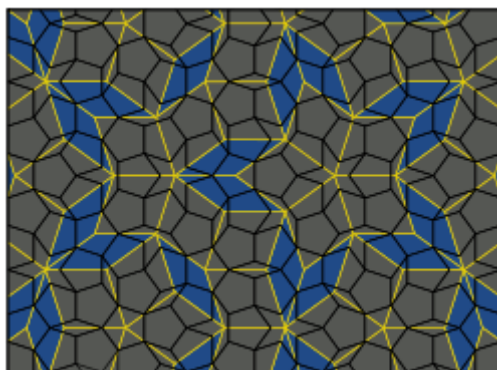
Lu, Peter J., and Paul J. Steinhardt. "Decagonal and Quasi-crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture." *Science* 315 (2007): 1106-1110.

Grünbaum, Branko; Shephard, G. C. (1987), *Tilings and Patterns*, New York: W. H. Freeman, ISBN 0-7167-1193-1.

Penroseove ploščice

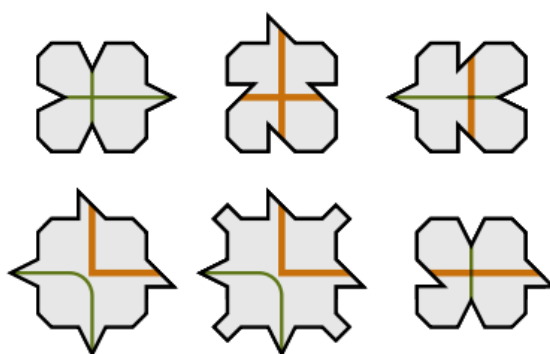
Splošno o ploščicah

Penroseove ploščice je v sedemdesetih letih 20. Stoletja raziskoval matematik in fizik Roger Penrose, po katerem so ploščice tudi dobile svoje ime. Leta 1974 je prikazal Penroseove ploščice v svojem delu *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*. Namesto kvadratov uporabil 6 pet kotnih osnovnih aperioidičnih ploščic za tvorbo vzorca.



Slika 1: Penroseove ploščice sestavljene iz pet-kotnikov

Pod ime Penroseove ploščice uvrščamo neperiodične ploščice, ki so sestavljene iz osnovnih aperioidičnih delov, kateri v danem prostoru pokrivajo celotno površino brez napak ali prekrivanja.



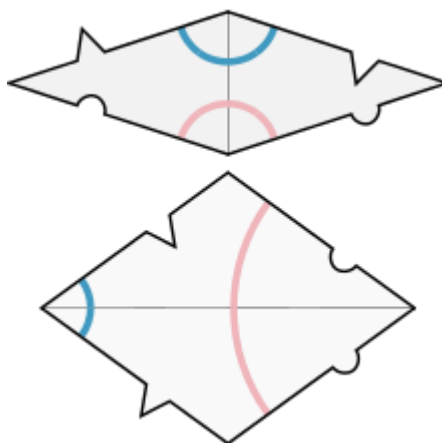
Slika 2: Robinsonove ploščice

Poznamo več vrst Penroseovih ploščic, najpodrobneje se bomo dotaknili »Kite« in »Dart« ploščic, ki sestavljajo vzorec določenega tipa Penroseovih ploščic, a ne smemo pozabiti še na druge oblike, v katerih se lahko te ploščice pojavljajo.

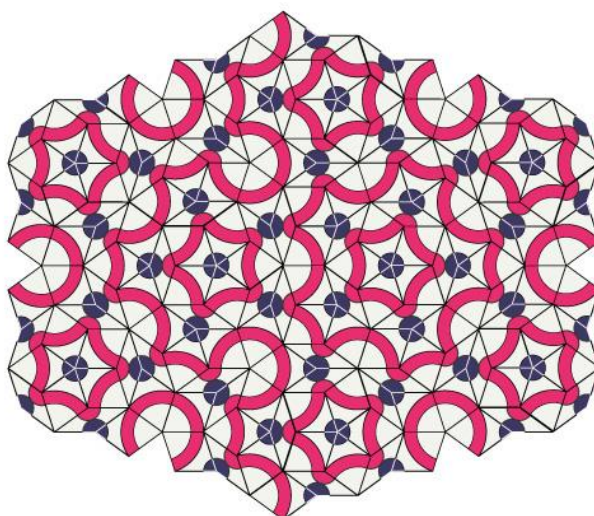
Romboidne Penrosove Ploščice

Ta tip Penrosovih ploščic je sestavljen iz para romboidov/rombov z enakokrakimi stranicami in različnimi koti. Vendar, ko uporabljamo vzorec prikazan na sliki, pridemo do manjšega problema.

Če so rombi razporejeni napačno (v našem primeru »napačno« pomeni periodično), je cel vzorec periodičen in ne ustreza definiciji Penroseovih ploščic, zato moramo vpeljati posebna pravila glede tega, kako so lahko Rombi razporejeni, da ustrezajo kriterijem. Noben par ploščic ne sme izoblikovati paralelograma, ker bi to povzročilo periodičnost. Prav tako pa moramo upoštevati še pravilo robnih modifikacij, kjer se lahko pari dotikajo samo na določenih mestih tako, da se deli namišljenih krogov na osnovnih aperiodičnih delih prekrivajo (kot prikazano na sliki).



Slika 3: Osnovni aperiodični romboidni ploščici

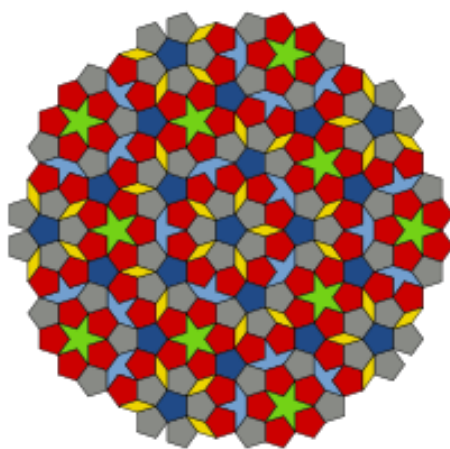


Slika 4: Romboidne Penroseove ploščice

Osnovne Penroseove ploščice

Take kot vse Penroseove ploščice, ki jih bomo še omenili, se mora tudi pri osnovnih upoštevati nekaj pravil, da vzorec, ki ga dobimo, ni periodičen.

Za osnovne Penroseove ploščice se uporablja pet kotnikov in še tri dodatne oblike za doseganje želenega vzorca. Te tri dodatne oblike so: Pentagram (Pet kotnik v obliki zvezde), Čolnič (Prestavlja 3/5 zvezde) in Diamant (tanked romboid).



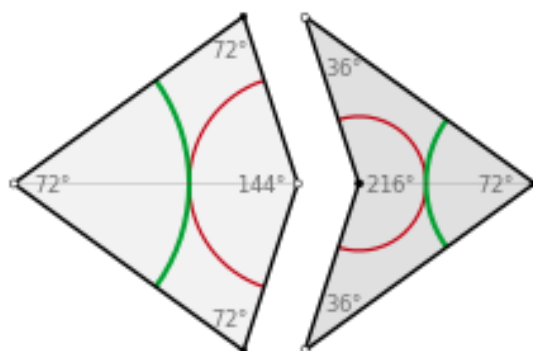
Slika 5: Osnovne Penroseove ploščice

»Kite« in »Dart« Penroseove ploščice

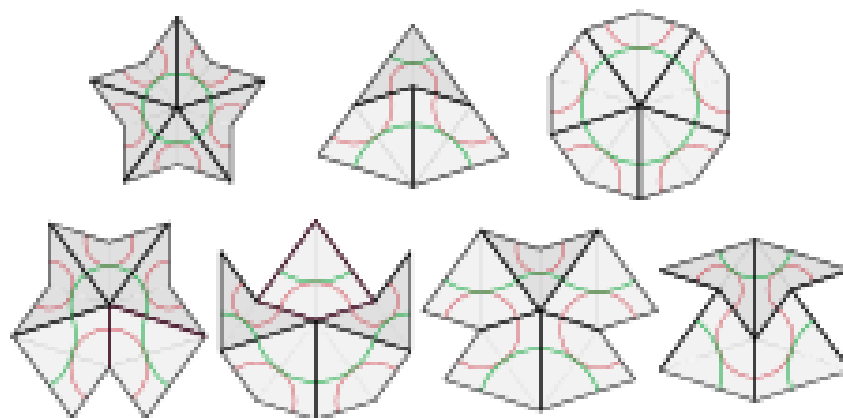
»Kite« in »Dart« Penroseove ploščice uporabljajo par štiri-kotnikov, ki ju poimenujemo »Kite« štiri-kotnik in »Dart« štiri-kotnik. Ta dva tipa štiri-kotnikov sta sestavljena iz dveh trikotnikov, ki se jima reče »Robinsonova trikotnika«.

Zanju je značilno, da pri »Kite« ploščici merita zgornji in spodnji kot skupaj 144 stopinj in 72 stopinj posamično, levi kot 72 stopinj in desni kot 144 stopinj (kot prikazano na sliki). Pri »Dart« ploščici pa zgornji in spodnji kot skupaj merita 72 stopinj in 36 stopinj posamično, levi kot meri 216 stopinj in desni 72 stopinj (kot prikazano na sliki "Kite" in "Dart" ploščice z oznakami kotov).

Ta dva tipa ploščic se lahko združi, da nastane romboid, vendar pravila povezovanja to prepovedujejo. Saj se morajo povezovati po točno določenih pravilih glede na njihove kote. Najlažje si pravila tega združevanja predstavljamo, če v same »Dart« in »Kite« ploščice narišemo dele krožnice in poskrbimo, da se pri postavljanju ploščic v vzorec konci teh delov krožnic ujemajo, kot na sliki 7 spodaj.



Slika 6: "Kite" in "Dart" ploščice z oznakami kotov



Slika 7: Načini povezovanja "Kite" in "Dart" ploščic

Eksperimentalni del naloge

Analizirani primeri 1

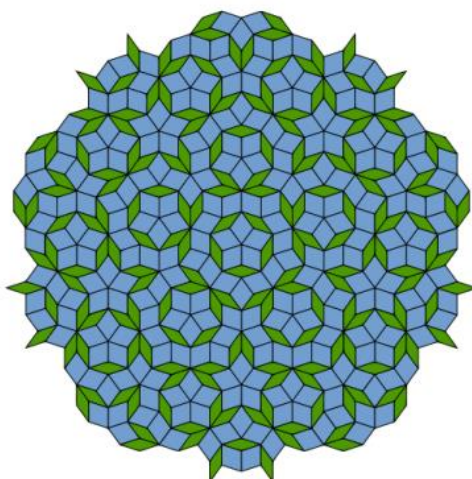
V 1. delu raziskave smo podrobno analizirali sedem vzorcev Penrose ploščic s postopkom, omenjenim v podpoglavju [Način raziskovanja 1](#). Postopek je naslednji:

Za raziskovanje bomo uporabili naslednji matematično-grafični program: Inkscape (demo verzija), Corel draw (demo verzija). Odločili smo se podrobno analizirati sedem osnovnih pojavnih oblik Penroseovih ploščic. Vsako posebej bomo najprej vstavili v prej naštete programe ter odčitali vsako dolžino stranice likov, ki se pojavljajo v njej. Nato se bomo osredotočili na robne ter na tiste like, ki so oddaljeni za več kot dve kombinaciji trikotnika in romba. Prav tako bomo analizirali dolžine in razmerja stranic vseh vmesnih likov in tako poskušali razbrati razmerje, v katerem se pojavljajo. Postopek bomo ponovili v vseh osmih smereh neba in tako dobili celovito sliko razmerij v modelu. Dobljena razmerja bomo primerjali z že znanimi, ki se domnevno pojavljajo v naravi poleg zlatega reza. Postopek bomo ponovili na vseh sedmih modelih.

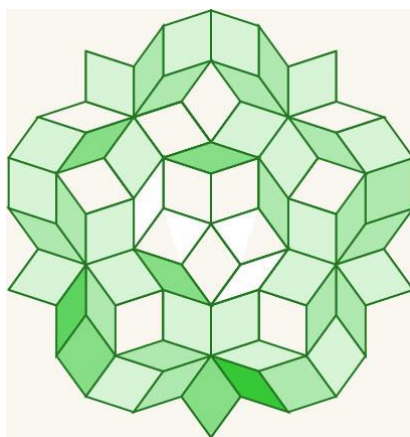
Za končno razmerje bomo uporabili diagonale rombov, ki tvorijo osnovnice enakokrakih trikotnikov. Vse rombe, tako večje kot tudi srednje velike in male, bomo namreč razcepili na dva enakokraka trikotnika. Osnovnici, kateri bomo pridobili z razcepom večjega in manjšega romba, bomo primerjali med seboj. Izračunali bomo njuno razmerje in ga primerjali z znanimi vrednostmi zlatega reza, polovičnega zlatega reza ter zlatega reza na kvadrat. Ta postopek bomo uporabili za like v vse smeri. Za dolžino nejasnih stranic nam bo v pomoč program Corel Draw, medtem ko bomo s pomočjo Inkscapea odčitali smer likov v modelu tako, da ne bomo zašli s prave poti. S pomočjo Inkscapea bomo izmerili večinoma vse stranice v modelih.

Na koncu bomo strnili vse podatke, ki smo jih izluščili iz izbranega modela ter jih združili in preračunali, pri tem pa uporabljali program Wolfram Alpha. Vseh sedem modelov bo deležnih enake obravnave in analize.

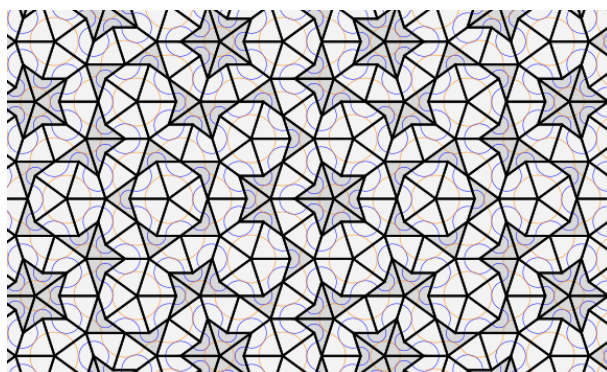
Prvi analizirani vzorci Penroseovih ploščič pa so naslednji:



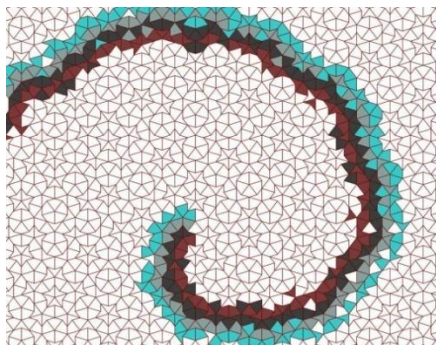
Slika 8: Motiv romba



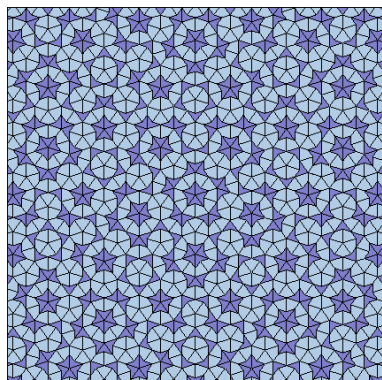
Slika 9: Osredotočeni motiv zelene zvezde



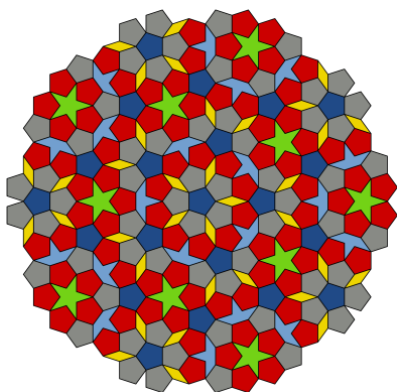
Slika 10: Zvezde z deset-kotniki



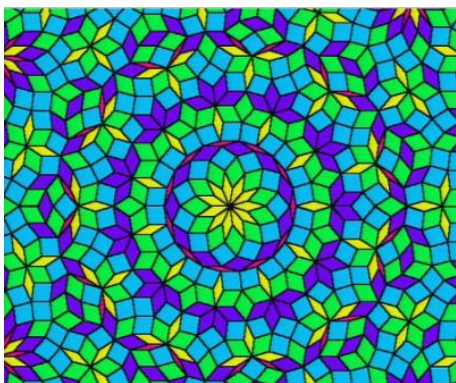
Slika 11: Spiralni zmaj



Slika 12: Modre zvezde



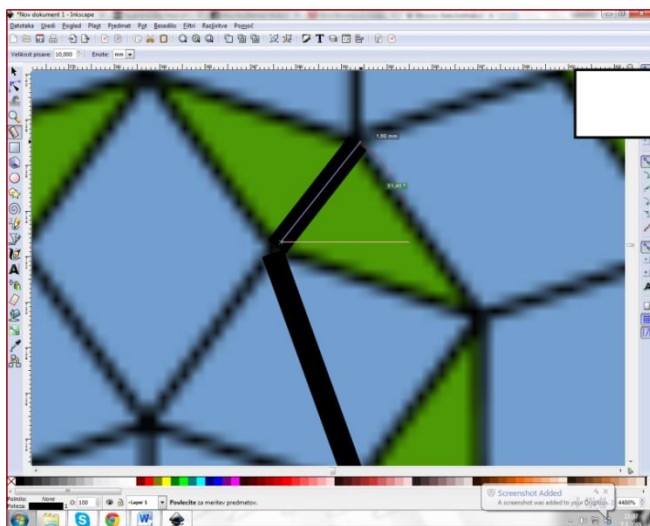
Slika 13: Pet kotniki z zvezdami in rombi



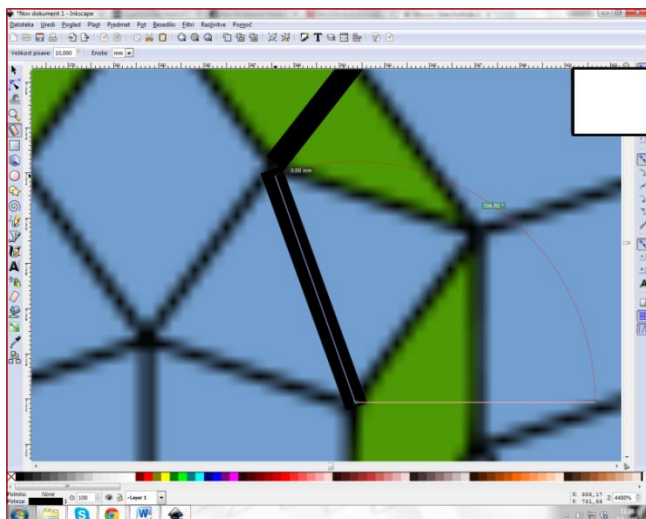
Slika 14: Sonce

Motiv romba

Najprej smo določili začetno točko oziroma začetni lik naše raziskave. Ker se v tem modelčku pojavljata veliki in mali romb, ki ju je možno razdeliti na enakostranične trikotnike, smo se odločili izbrati enega izmed petih velikih rombov, ki tvorijo sredino modela. Vsako stranico smo izmerili in ugotovili, da je njihova dolžina 2,7 mm. Ko smo romb z diagonalo ločili na dva trikotnika, je sledila meritev njune skupne osnovnice. Njena velikost je 3,0 mm. Ugotovili smo, da kraki enakokrakih trikotnikov tvorijo stranice manjših rombov. Postopek ločevanja lika na dva trikotnika smo ponovili tudi pri tem in izmerili dolžino osnovnice, ki znaša 1,6 mm. Uporabili smo program Inkscape.



Slika 15: Osnovnica trikotnika



Slika 16: Diagonala romba

Po končani analizi, računanju in zbiranju podatkov smo ugotovili, da so stranice med seboj (mali, veliki romb, mali, veliki trikotnik) v razmerju Zlatega reza.

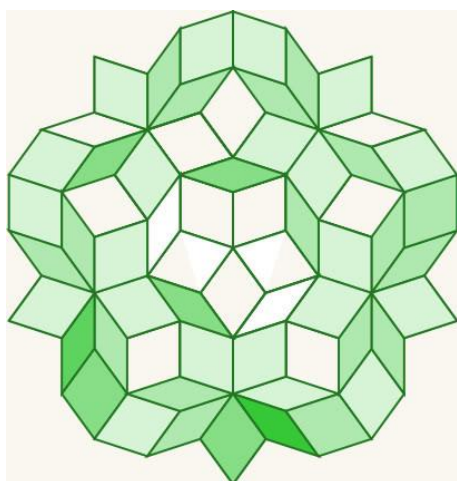
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Lik	Stranice	Osnovnica	Diagonala	Zlati rez
Veliki romb	2,7 mm	2,7 mm	3,0 mm	da
Mali romb	2,7 mm	2,7 mm	1,6 mm	da
Nastali trikotnik 1	2,7 mm	3,0 mm	/	da
Nastali trikotnik 2	2,7 mm	1,6 mm	/	da

Tabela 1: Prikazane dolžine meritev modela romba

Osredotočeni motiv zelene zvezde

Naslednji motiv deležen obravnave je bil zelena zvezda. Stranice naj bi bile skladne in sorazmerne v razmerju Zlatega reza. Tako kot pri prvem motivu, smo tudi tukaj potrebovali začetno točko za bodoče analize. Izbrali smo osrednjo, torej tisto ki leži v sredini zvezde, sestavljene iz petih velikih rombov. Po koncu meritev stranic rombov, ležečih znotraj sredinske zvezde, smo ugotovili, da je dolžina vseh 14,45 mm. Postopek smo ponovili tudi na manjših rombih, jih razdelili na dva trikotnika in tudi v tem primeru opazili skladanje stranic z Zlatim rezom. Uporabili smo program Inkscape.



Slika 17: Zelena zvezda

Razmerja med stranicami je povsod enako in znaša 1:1. Po kasnejših meritvah smo potrdili obstoj Zlatega reza med liki, ki sestavljajo ta motiv.

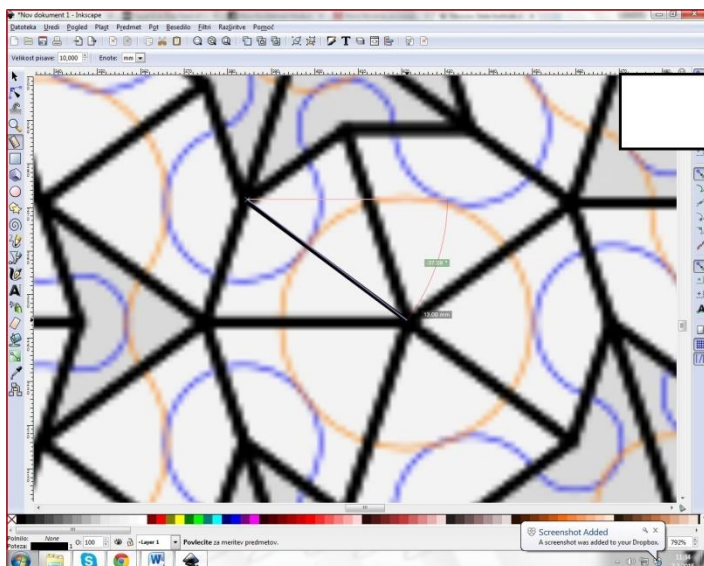
Lik	Stranice	Diagonale	Zlati rez
Romb	14,45mm	$\sqrt{14,45^2 \times 14,45^2}$	da

Tabela 2: Prikazane dolžine meritev modela zelene zvezde

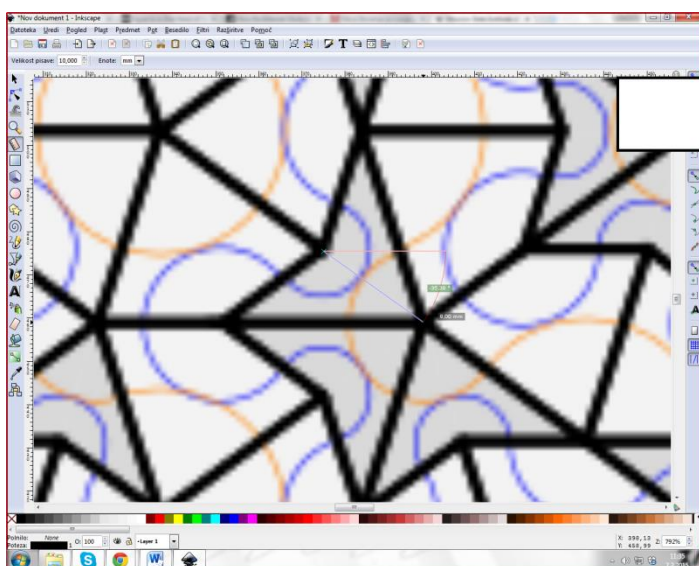
Motiv bele zvezde z deset-kotniki

Naslednji motiv, ki smo ga analizirali, je bil motiv bele zvezde z deset-kotniki. Pri tem motivu gre za izmenjavanje zvezd (tako velikih kot tudi malih) in deset kotnikov, sestavljenih iz desetih trikotnikov. Tukaj smo analizo pričeli v enem od deset kotnikov. Najprej smo razdelili dele lika na posamezne enakokrake trikotnike, potem pa izmerili njihove krake in osnovnice (radije osem kotnika). Za tem smo izmerili in izračunali tudi dolžine stranic vseh zvezd (sestavljene iz dvojnih trikotnikov), ki so v bližini začetnega osem kotnika. Meritve (Inkscape) so nam dale naslednje rezultate:

Lik	Stranice	Premjer/ polmer	Sestavljen lik	Zlati rez
Deset kotnik	9,95 mm	24,6mm / 12,3mm	Iz trikotnikov	/
Trikotnik znotraj deset kotnika	12,3 mm	12,3mm (polmer deset kotnika)	Sestavljajo veliki/ mali deset kotnik	da
Zvezdin trikotnik	9,95 mm	/	Iz trikotnikov	da
Trikotniki izven	9,95 mm	/	Iz dveh trikotnikov/ sami	da



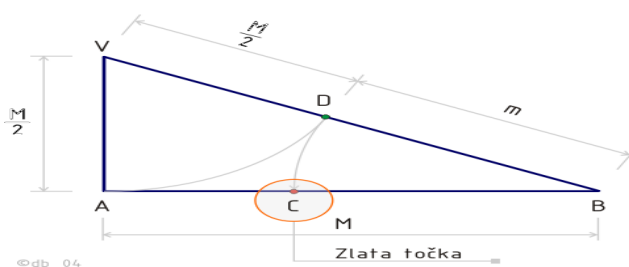
Slika 18: Trikotniki v deset kotniku



Slika 19: Dvojni trikotnik, tudi lahko del zvezde

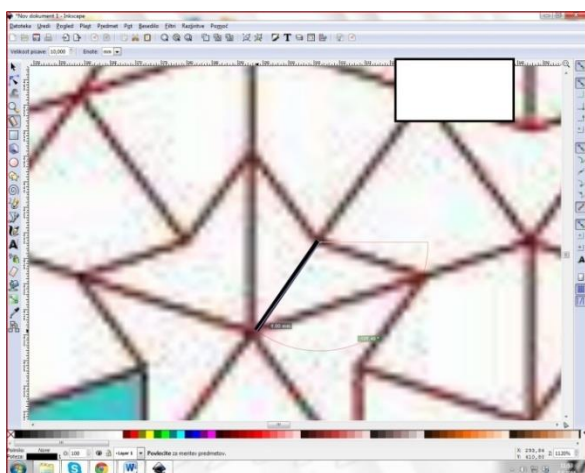
Delitev likov na posamezne trikotnike nam je omogočila celovit vpogled v strukture posameznik večjih struktur na sliki, kot npr. deset-kotnika. S primerjavo kotov, uporabo kotnih funkcij in programa Inkscape smo uspešno pridobili razmerja stranic in potrdili obstoj Zlatega reza v tem motivu.

Stranica trikotnika, ki ni hipotenuza, postane najmanjša stranica enakokrakega trikotnika v osem kotniku. Razmerje stranic v trikotnikih, ki so sestavni del vseh likov, na sliki kaže razmerje zlatega reza.

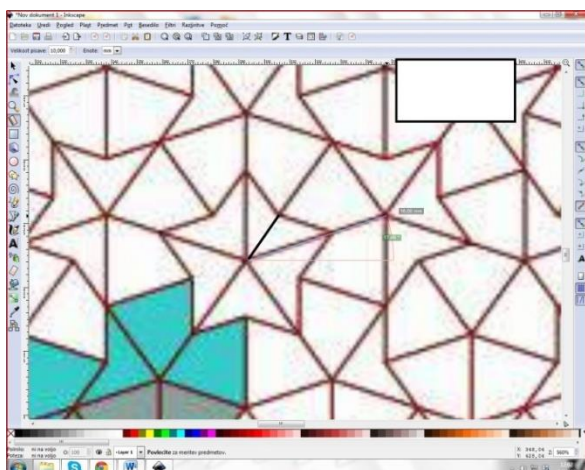


Motiv spiralnega zmaja

To zaporedje večjih in manjših deset kotnikov ter večjih in manjših zvezd tvori pot, po kateri se lahko giblje zmaj, kot je prikazano na tem posnetku: <https://www.youtube.com/watch?v=pEW7lcYirM8>. Male zvezde tvorijo dvojni trikotniki, katere je bilo treba razčleniti na posamezne. Vsako zvezdo je sestavljalo pet dvojnih. Merjenje je pokazalo, da sta kraka teh enakostraničnih trikotnikov dolga 6 mm, medtem ko je sama osnovnica 9,4 mm. Vse polovice dvojnih kotov so si med seboj skladne. V našem analiziranem motivu so hipotenuze teh trikotnikov del polmera deset kotnika, prav tako pa tudi del večjega trikotnika, ki skupaj s še sedmimi tvori osem kotnik. Veliki trikotnik ima dva kraka dolga po 16 mm, osnovnico pa 10 mm. Manjši trikotnik pa kraka dolga 10 mm ter osnovnico z dolžino 6 mm. Osnovnica manjšega trikotnika predstavlja eno stranico enakokrakega trikotnika v zvezdi. Krak z dolžino 10 mm pa predstavlja osnovnico večjega trikotnika v osem kotniku. Iz analize podatkov in preračunavanja dolžin sledi zaključek, da so si trikotniki med seboj v razmerju Zlatega reza.



Slika 20: Delitev dvojnih trikotnikov



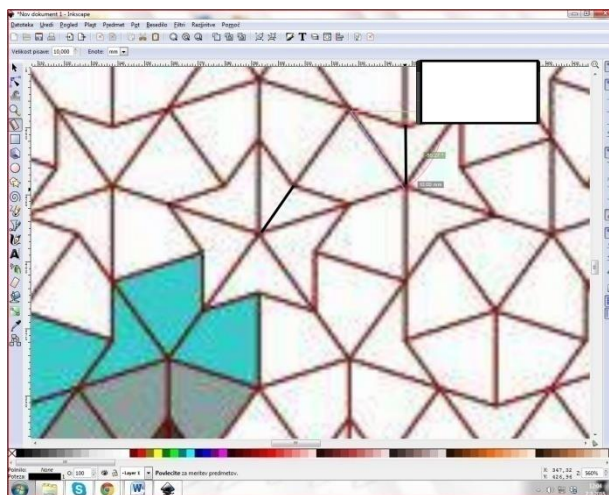
Slika 21: Meritev polmera deset kotnika

"Zmaj" potuje okoli osrednje male zvezde. Premika se po desetkotnikih, ki so od zvezde oddaljeni za polovico polmera deset kotnika, v katerem se zvezda nahaja.

Meritve smo izvedli s programom Inkscape.

Lik	Stranice	Diagonale	Skladnost	Zlati rez
Trikotnik zvezde	7,35 mm	/	skladen	da
Trikotnik 10 kotn.	16 mm	/	skladen	da
Manjši 10 kotnik	10 mm	/	skladen	da

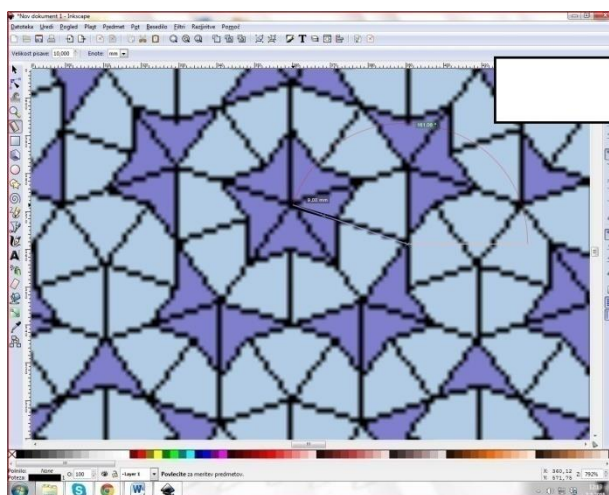
Tabela 4: Prikazane dolžine meritev Spiralnega zmaja



Slika 22: Meritve dvojnih trikotnikov

Motiv modre zvezde

Za naslednjo analizo smo si izbrali motiv modre zvezde, kjer se prepletajo in dopolnjujejo manjše in večje zvezde ter večji in manjši deset-kotniki. Ta motiv se od Spiralnega zmaja loči po tem, da tu nimamo poti, po kateri bi "zmaj" lahko potoval. V programu Inkscape smo se lotili merjenja dolžin, s programom Wolfram Alpha pa izračunavali razmerja s pomočjo Pitagorovega izreka ($c^2=a^2+b^2$). Spoznali smo, da so posamezni enakokraki trikotniki (že razdeljeni trikotniki dvojnih trikotnikov manjših zvezd) opremljeni s krakoma z dolžino 3,6 mm ter z osnovnico dolžine 4,75mm. Večje zvezde so sestavljene iz večjih enakokrakih trikotnikov, katerih dolžina krakov znaša 9 mm, osnovnic pa 5,6 mm. Meritve smo dvakrat ponovili, saj same stranice likov v motivu niso bile natančno podane.



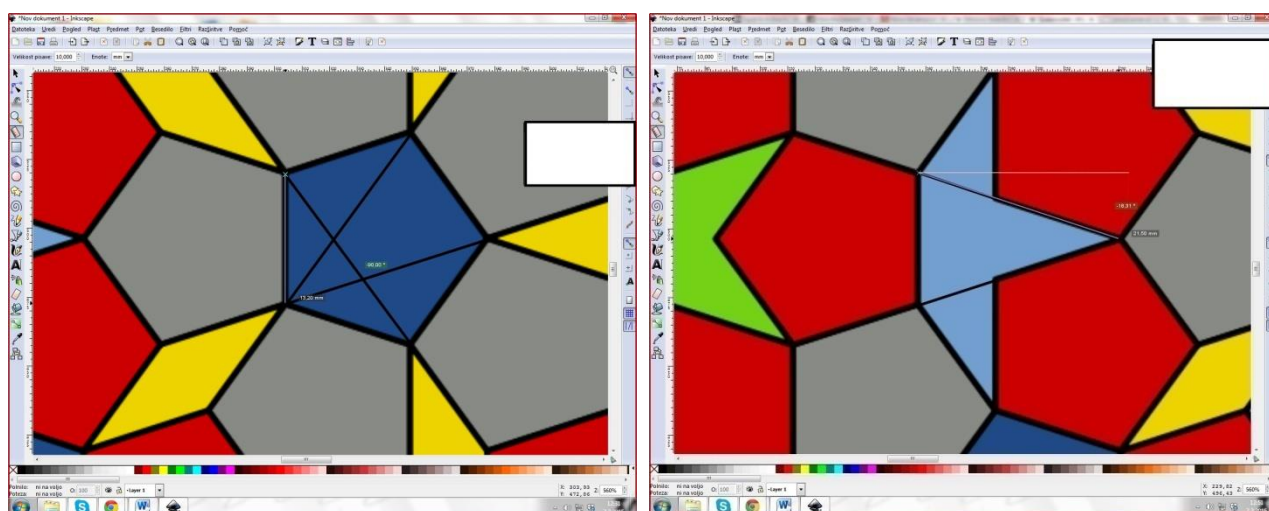
Slika 23: Meritev polmera deset kotnika

Lik	Kraka	Osnovnica	Razcepljenost	Zlati rez
Manjši trikotnik	3,6 mm	4,75 mm	da	da
Večji trikotnik	9 mm	5,6 mm	ne	da

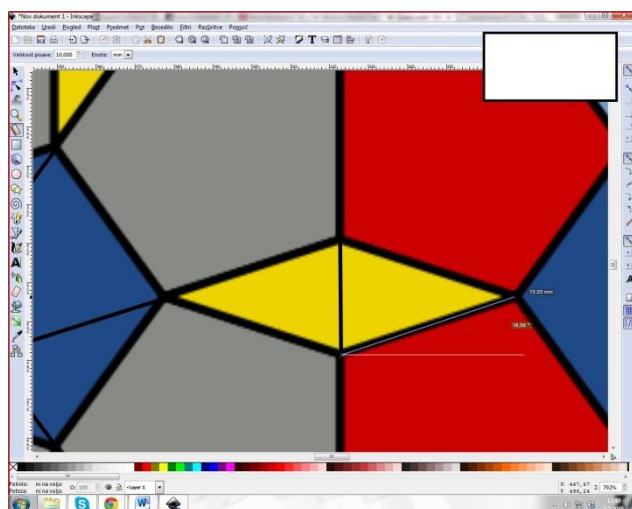
Tabela 5: Prikazane dolžine meritev motiva modre zvezde

Motiv pet kotnika z zvezdami in rombi

Ta motiv je poseben, saj ga sestavlja pet-kotnik. Za analizo tega lika smo najprej morali poiskati trikotnike znotraj pet-kotnika, katerih stranice so se nato križale in ustvarile polje, kjer se nahaja 8 trikotnikov, ki so si med seboj skladni. Stranica enakokrakega trikotnika v pet-kotniku je osnovnica trikotnika z rombi, ki s pet-kotnikom deli oglišče. V liku polovične zvezde so deli pet-kotnika in trikotnika znotraj le-tega. Ko smo zvezdo razdelili na tri-trikotnike, smo odčitali dolžine stranic nastalih likov. Glavni trikotnik ima kraka dolga 21,5 mm, osnovnico pa 13,2 cm. Nastala stranska trikotnika pa imata osnovnico dolžine 8 mm in 13,2 mm. Sam pet-kotnik ima pet stranic z dolžino 13,2 mm, tvori ga pet trikotnikov. Rombi okoli začetnega pet-kotnika imajo prav tako stranice dolge 13,2 mm. Analiza je potekala s programom Inkscape. Tudi tukaj smo ponovili meritve.



Slika 24: Delitev pet kotnika in polovične zvezde



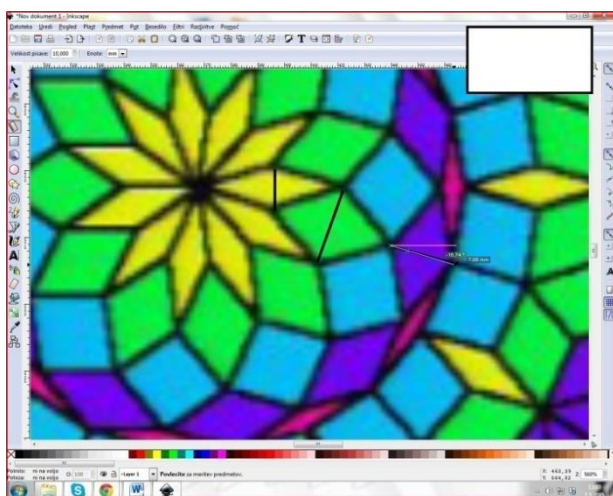
Slika 25: Romb, deljen na 2 trikotnika

Lik	Stranica	Diagonala	Zlati rez
Pet kotnik	13,2 mm	/	(Trikotniki znotraj) da
Romb	13,2 mm	8,4 mm	da
Polovična zvezda	13,2 mm	/	(Trikotniki med sabo) da

Tabela 6: Prikazane dolžine meritev motiva pet kotnika z zvezdami in rombi

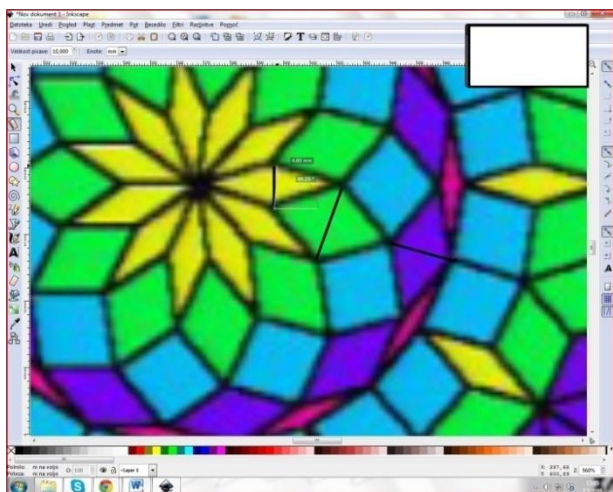
Motiv sonca

Zadnji motiv deležen analize, je bil motiv sonca. Pri tem motivu gre za prepletanje različno velikih rombov, od majhnih preko srednjih do velikih. Središče "sonca", katerega tvorijo rombi srednjih velikosti, smo izbrali za izhodišče naše analize. Najprej smo izmerili dolžine stranic večjih rombov, ki obdajajo srednje velike v središču. Dolžina njihovih stranic je 8,2 mm, diagonalna pa ima dolžino 7,0 mm. Po opravljeni meritvi na srednjih rombi smo na enak način pričeli z obravnavo manjših. Dolžine stranic pri teh so enake, znašajo pa 7,0 mm in 4,6 mm diagonalna. Večji rombi imajo 7,0 mm dolge stranice in 8,2 mm dolgo diagonalno. Vse rombe smo nato razdelili, tako kot v prejšnjih postopkih, na posamične enakokrake trikotnike. Diagonale rombov so sedaj postale osnovnice enakokrakih trikotnikov. Meritve so potekale s pomočjo programa Inkspace. Ta motiv je bil, tako kot prejšnja dva, deležem dodatne obravnave. Ves postopek obravnave smo ponovili še dvakrat.



Slika 26: Razcepljanje rombov

Celoten motiv sestavljajo razcepljeni trikotniki, ki so sorazmerni z manjšimi in tvorijo razmerje Zlatega reza.



Slika 27: Merjenje dolžin osnovnic trikotnikov

Lik	Stranica	Osnovnica trikotnika	Zlati rez (v trikotnikih)
Mali romb	7,0 mm	4,9 mm	da
Srednji romb	8,2 mm	7,0 mm	da
Veliki romb	7,0 mm	8,2 mm	da

Tabela 7: Prikazane dolžin meritev motiva sonca

Razprava 1

Motiv	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Izračun	3:1,6	14,45:8,95	9,95:12,3	7,35:10	4,75:5,6	22:8,4	8,2:4,9
Razmerje	φ	φ	$\varphi/2$	$\varphi/2$	$\varphi/2$	φ^2	φ

Tabela 8: Predstavlja izmerjene vrednosti in izračunana razmerja zgoraj obravnavanih sedmih primerov.

Naše meritve in izračuni so nam pokazali, da se v analiziranih motivih pojavljajo razmerja zlatega reza, zlatega reza polovic in kvadrata zlatega reza. Po vseh opravljenih raziskavah smo lahko sestavili tabelo, kamor smo vpisali izmerjene vrednosti in izračunana razmerja. Ta razmerja smo primerjali z našo hipotezo o obstoju drugih razmerij poleg »zlatih« v motivih Penroseovih ploščic. Tudi po natančnih merjenjih in izračunih novega razmerja v teh sedmih motivih nismo odkrili. Ker smo se prvi lotili te raziskave, je bilo potrebno veliko časa za sam premislek o motivih, načinu raziskovanja, analizi podatkov.

Pri vsakem motivu smo, tako kot že omenjeno v poglavju [Način raziskovanja 1](#), s pomočjo programov Inkscape in Wolfram Alpha merili in izračunavali dolžine stranic, diagonal in osnovnic raznih likov. V večini primerov smo bili primorani like tudi razcepiti, da smo prišli do motivov primernih za nadaljnjo obravnavo, npr. razcep dvojnih trikotnikov na posamezne. Raziskavo smo vedno začeli v središču izbrane kombinacije ploščic, potem pa se pomikali proti robu. Vsi motivi so bili deležni intenzivne in natančne raziskave, ki nam je razkrila razmerje v njih.

Da ne bi prišlo do lažnih in nenatančnih podatkov, smo mnoge motive zaradi zaporedja likov v njih morali izmeriti tudi večkrat.

Analizirani primeri 2

V tem delu raziskovanja smo razširili način analiziranja posameznih motivov. Namesto samega merjenja stranic smo tukaj dodali še merjenje obsegov ter primerjavo le-teh med seboj. Na ta način želimo izračunati razmerja med stranicami ter razmerja med obsegi likov v motivih. Tudi tokrat nam je bil v pomoč računalniški program Inkscape, kjer smo izvedli meritve in obravnave. Za nadaljnje izračuna smo uporabljali program Wolfram Alpha.

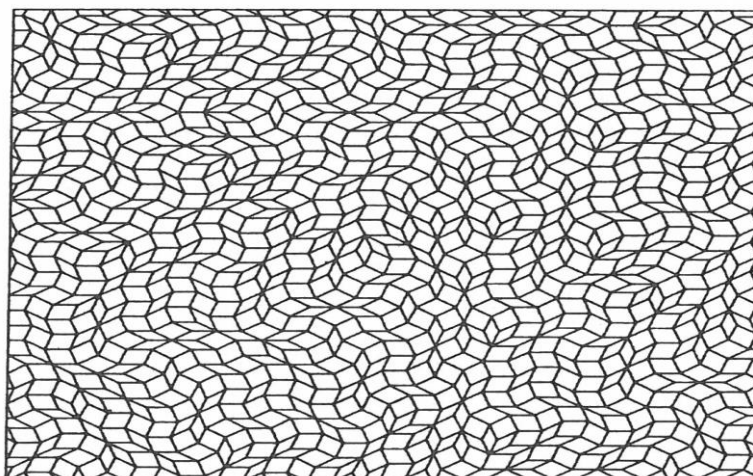
Tokratni motivi so bolj zapletene zgradbe. Prvi izmed njih, motiv "Prepleteni rombi", je brez očitnega središča. Tukaj bomo meritve pričeli v kotih vzorca in nadaljevali proti notranjosti. Kot že povedano, se tukaj osredotočamo tudi na dolžino obsegov pri likih, ki ga sestavljajo. Zanima nas predvsem primerjava obsegov, razmerje. Izpuščeno ne bo merjenje diagonal vseh različnih likov, razpolavljanja likov na trikotnike ter analiziranje le-teh. Izračunali bomo osnovni "krog", neko središče. Nato bomo izmerili še drugi "krog" ter izračunali koeficient, ki je razlog za širitev obsega prvega "kroga".

Naslednja dva motiva, "Motiva v nastajanju", imata jasen začetek v črni točki. Posebna sta zaradi dejstva, da se širita navzven. Vsaka barva označuje nov val širitve, ta pa je sorazmerna. Opazimo, da se barva nikoli popolnoma ne spoji - vedno ostaja del, kjer se prejšnja stopnja poveže z bodočo (pri drugem modelu obstajata celo dve takšni točki, kjer ni spajanja. V eni od dveh točk najdemo izključno dotikanje dveh rombov z roboma). Merjenja bomo pričeli v sredini vzorca, točno v prikazani črni točki. Nadaljevali bomo v smeri širitve rombov, postopoma po stopnjah. Vsaka stopnja bo preučena na tak način, da bomo izvedeli obseg likov in obseg same širitve. Primerjava obsegov nam bo podala razmerje, ki se pojavlja v teh vzorcih, medtem ko primerjava obsega širitve število, katero množi prvotno oz. prejšnjo stopnjo širitve in je razlog za obseg obravnavane. Tudi tu ne bo izpuščeno merjenje diagonal vseh različnih likov, razpolavljanja likov na trikotnike ter analiziranje le-teh.

Posebnost teh treh motivov pa je prav tako tudi sama postavitev likov v njih. V prejšnjih obravnavanih vzorcih smo v vsakem izmed njih razbrali obliko, konkreten motiv npr. Motiv modre zvezde. Tukaj pa, predvsem v prvem vzorcu, ne vidimo jasne tvorbe likov. Tudi pri naslednjih dveh, oblike, kot smo jih vajeni iz prvega dela raziskovanja, ni. V teh primerih nastajajo notranji prehodi, stopnje, ki naj bi se enakomerno večale. Če se res, bomo odkrili kasneje v obravnavi.

Vse vzorce bomo analizirali vsaj dvakrat, nadaljnje informacije o njih samih bodo podane kasneje pri podrobnih obravnavah meritev vsakega posebej.

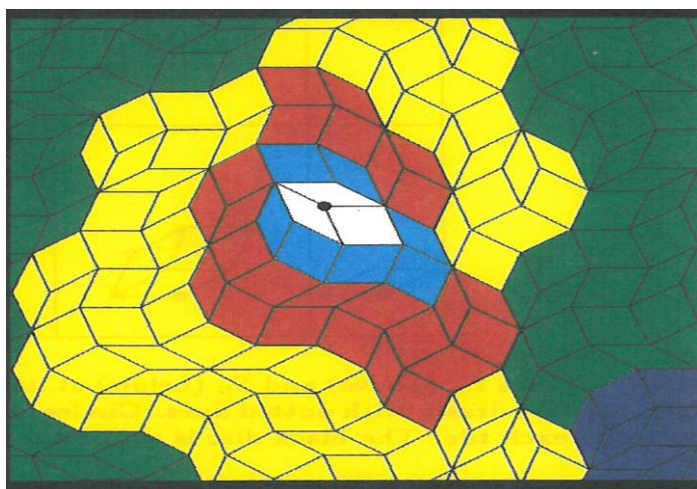
Analizirani vzorci v tem poglavju so sledeči:



Slika 28: Prepleteni rombi



Slika 29: Nastajanje motiva 1 iz središča



Slika 30: Nastajanje motiva 2 iz središča

Motiv Prepleteni rombi

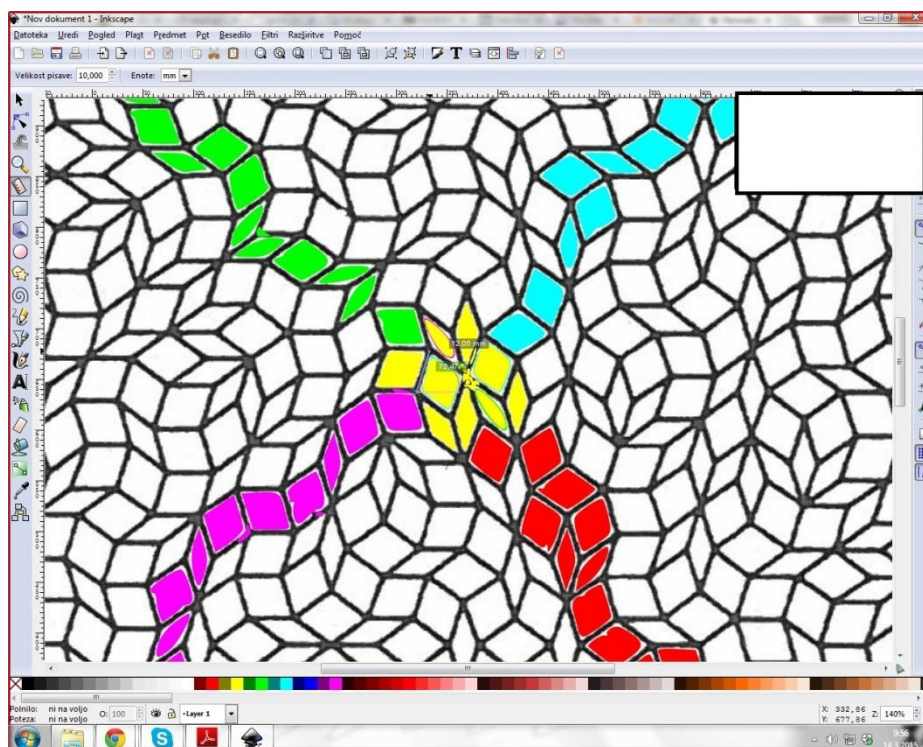
Ta motiv nima jasne začetne točke, tako da smo našo analizo pričeli v vseh vogalih modela. Iz vsake smeri smo najprej preko likov dosegli središče, katerega smo nato označili z rumeno barvo, kot je prikazano na sliki spodaj. Vsako smer smo označili z drugo barvo. Večkrat smo proces ponovili, saj nismo dosegli točnega središča. Postopek, po katerem smo dosegli središče, je bil naslednji:

Vsi vzorci v motivu nastajajo po principu, opisan v slikah na naslednji strani. Gre za povezovanje rombov, različnih tako po obliki kot tudi po kotih, kateri so sestavni del vseh. Sledili smo tem povezovanjem in tako dospeli do središča. Postopek smo morali ponoviti iz vseh štirih smeri, saj smo le tako lahko našli središče tega motiva.

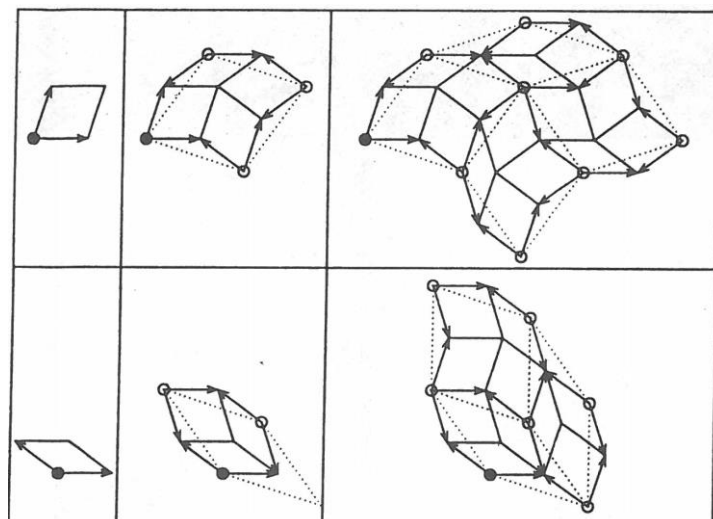
Pred začetkom merjenja dolžin smo osnovno mersko enoto iz piksel (px) spremenili v milimetre. Izračunali smo dolžino stranic, ta znaša 12,05 mm. Pri tem primeru ne gre za nastajanje po stopnjah, ampak za širjenje po principu nastanka stranic (sliki Povezovanje in nastajanje motiva Prepletenih rombov 1 in 2). Ker so vse stranice enake, smo lahko izmerili obsege vseh različnih likov, ki se pojavljajo v tem vzorcu.

Za popolnejše razumevanje pa je bistven podatek, da se ta motiv stalno širi. Ne gre za širitve v obliki stopenj, ampak za nadaljevanje likov v vse smeri ter brez pravega zaključka.

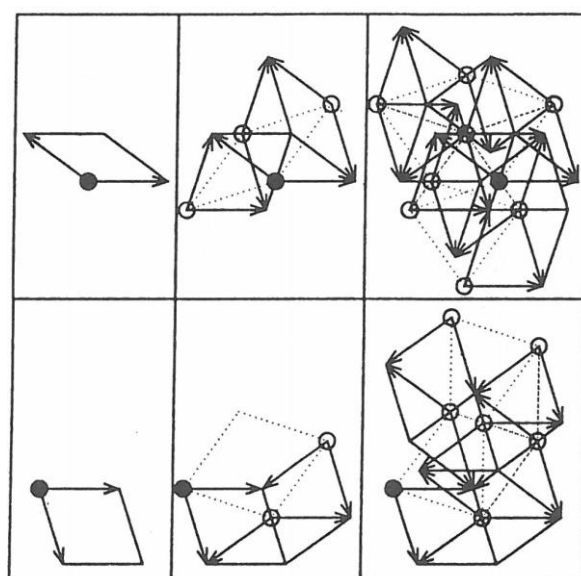
Izbrali smo osrednji del motiva, izračunali njegove vrednosti in dobili pot oziroma obseg tega dela. S pomočjo programa Inkscape in Wolfram Alpha smo izračunali tudi naslednji sklenjeni "krog" v motivu in izračunali, za koliko se je povečal v primerjavi s prejšnjim. Povečal se je s koeficientom 2. V tem trenutku nam ta informacija še ne pove kaj dosti. Za dokončne trditve je potrebna analiza naslednjih dveh vzorcev.



Slika 31: Iskanje središča in meritve le-tega



Slika 32: Povezovanje in nastajanje motiva Prepletenih rombov



Slika 33: Povezovanje motiva Prepletenih rombov

Nastajanje motiva 1 iz središča

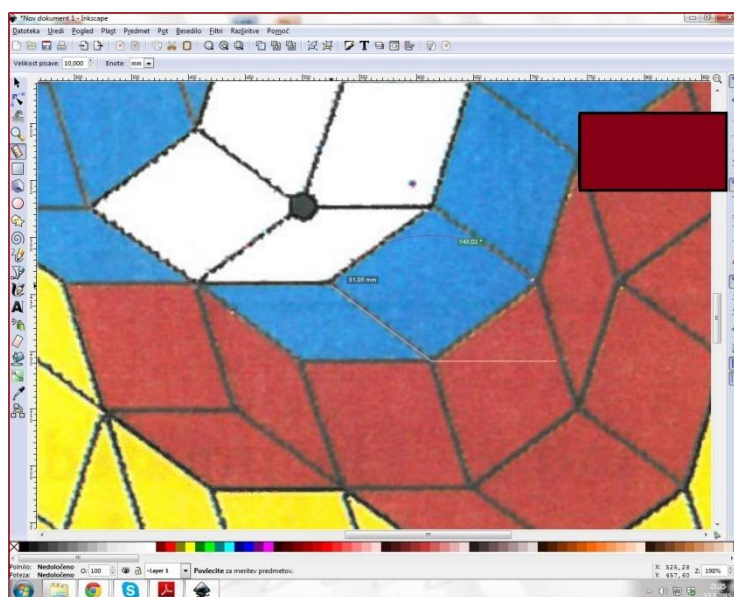
Sliko tega motiva smo najprej prenesli v program Inkscape, nato smo spremenili enote merjenja v milimetre in začeli z raziskavo. Izmerili smo dolžino stranice, ki znaša 31 mm. Predvidevali smo, da so vse stranice enake, vendar tega nismo prepustili zgolj naključju. Izmerili smo vsaj polovico stranic stopnje. Same stopnje si sledijo: 1. stopnja: Bela, 2. stopnja: Modra, 3. stopnja: Rdeča. Napravili smo meritve diagonal likov, jih razdelili na polovične trikotnike ter jih primerjali med seboj. Izračuni v programu Wolfram Alpha so nam pokazali, da med stranicami vlada razmerje zlatega reza. Razmerje stranic pa ni edino, ki nas je zanimalo v tem modelu. Ključnega pomena je tudi dejstvo, da naj bi se stopnje večale enakomerno, torej z nekim koeficientom. Ta koeficient bi moral biti, kot mislijo mnogi, število zlatega reza, zlatega reza polovic ali kvadrata. Takšna so pričakovanja, kmalu pa bomo vedeli resnico. Pričakujemo, da koeficient širitve ni zlati rez. Analizo smo pričeli v 1. stopnji - Beli.

1. stopnja: Bela

Pričetek obravnave je potekal v Beli stopnji, natančneje v črni absolutni sredinski točki celotnega motiva. Izračunali smo stranice, diagonale, razmerje med stranicami ter obsege samih rombov. Nato smo izmerili obseg celotne ravni, začevši v točki stika vseh treh stopenj. Po izračunih v programu Wolfram Alpha smo izvedeli, da obseg znaša 248 mm.

2. stopnja: Modra

Začetek analize te ravni je bil prav tako v točki stikanja treh stopenj. Izmerili smo dolžino posameznih modrih rombov, njihovih diagonal in jih razdelili na posamezne trikotnike za lažjo in natančnejšo obravnavo. S stranicami dolžine 31 mm je obseg celotne ravni ob seštevku stranic zunanjega (16) roba 496 mm. Na tej točki smo že bili zmožni izračunati koeficient širitve. Presenetljivo se število ni niti približalo kateremu koli zlatih rezov, saj znaša 2. Na tem mestu bi lahko že kar potrdili našo hipotezo o obstoju dodatnih razmerij, vendar bi to bilo lahkomiiselno. Pod drobnogled smo vzeli še 3. stopnjo - Rdečo.



Slika 34: Analiza motiva Nastajanje motiva 1 iz središča

3. stopnja: Rdeča

V izogib napačnim trditvam smo torej analizirali še tretjo raven v motivu - Rdečo. Kot pri prejšnjih smo začeli analizo v točki stika vseh treh stopenj. Merili smo dolžine stranic likov, diagonal, osnovnic trikotnikov (iz razpolovljenih rombov, lažje in natančnejše raziskovanje). Dolžina stranic je 31 mm, obseg sestavljen iz notranjega in zunanjega dela. Zunanji obseg meri 32x31 mm. Zaradi dejstva, da se rdeča stopnja ne stika, smo odvzeli stranico notranjega dela obsega, ki predstavlja zunanji obseg 2. stopnje - Modre. Celoten obseg 3. ravni znaša 992 mm. Pri izračunavanju koeficienta s pomočjo programa Wolfram Alpha smo ugotovili, da se ta stopnja prav tako ni povečala v razmerju zlatih rezov. Koeficient širitve namreč znaša 2. **Ker je koeficient širitve enak kot pri prehodu iz prve v drugo stopnjo, lahko trdimo, da smo odkrili novo razmerje.**

Stopnja	Obseg	Koeficient	Razmerje
Bela	248 mm	/	/
Modra	496 mm	2	Krat 2
Rdeča	992 mm	2 konst.	Krat 2

Tabela 8: Prikaz meritev Motiva 1 iz središča

Nastajanje motiva 2 iz središča

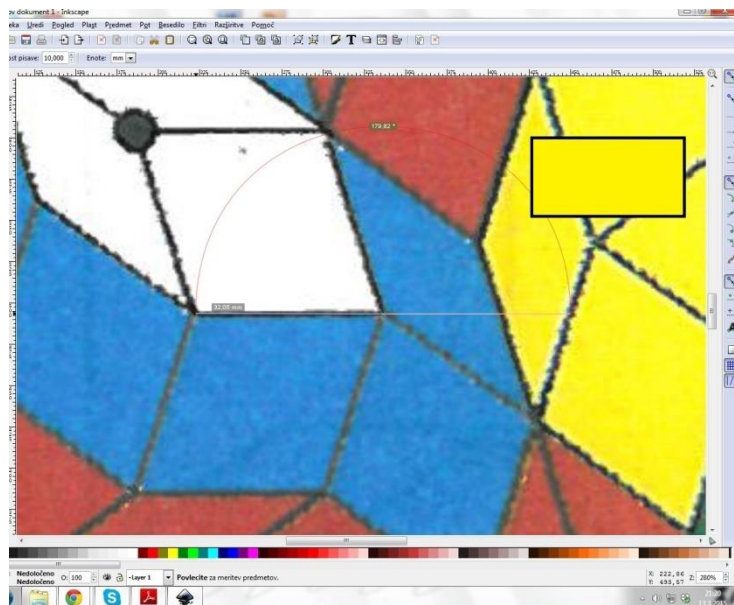
Pod drobnogled smo vzeli tudi drugi primer širitve motiva. Tudi tokrat smo celoten vzorec premestili v program Inkscape, kjer smo izvedli raziskave. Posebnost tega motiva je ta, da se točka stika treh stopenj pojavlja kar dvakrat. Analizirali smo prve tri stopnje, tako kot pri prejšnjem primeru. Prva nujna meritev je potekala vzdolž stranice romba pri stiku treh stopenj proti absolutnem središču celotnega motiva. Dolžina stranic v tem vzorcu je 32 mm. Izmerili smo tudi dolžine diagonal vseh različnih likov, ločevali rombe na trikotnike ter računali osnovnice. Kot pri zadnjem primeru, bomo tudi tukaj pozorni na razmerja, ki se pojavljajo. Največ pozornosti pa bomo namenili koeficientu širitve, saj je ta ključnega pomena za nadaljnje odvijanje dogodkov. Delo je najprej potekalo v 1. stopnji - Beli.

1. stopnja: Bela

Procedura je enaka kot pri prejšnji Beli stopnji. Razlika je v velikosti osnovne ravni, ki je za 2 stranici manjša. Obseg znaša 6x32 mm, torej 192 mm. Naslednja raven bo zahtevala večjo koncentracijo in previdnejše računanje, saj se na dveh mestih ne stika, torej je manj stranic in posledično manjše območje širitve.

2. stopnja: Modra

Izmerili smo dolžine stranic različnih likov te ravni, njihove diagonale ter osnovnice razdeljenih rombov na trikotnike. Meritve smo pričeli v enaki točki, kot pri prejšnji stopnji. Obseg te ravni je znašal 12x32 mm, torej 384 mm. Sam obseg je sestavljen iz zunanjih stranic (12). Stranic je tu manj kot pri Modri stopnji prejšnjega vzorca. Seveda pa tukaj ni število stranic dejstvo, ki nas najbolj zanima. Najpomembnejši je koeficient širitve. Po natančnem izračunavanju smo prišli do ugotovitve, da to število znaša 2. Tudi ta primer torej ni niti blizu razmerju Zlatega reza. Da ne bi prišlo do zmot, ki bi katastrofalno vplivale na naše delo, se tukaj prav tako nismo vstavili zgolj pri tej stopnji. Nadaljevali smo z 3. stopnjo - Rdečo.



Slika 35: Meritve na 2. motivu nastajanja

3. stopnja Rdeča

Sistem obravnave te ravni je enak kot pri prejšnjih dveh. Pričeli smo v točki stika treh stopenj in izračunali dolžine. Ta raven pa je posebna zaradi dveh lastnosti. Prva je ta, da se raven med seboj ne sklene, druga lastnost pa je vsebovanje dveh točk stikanja vseh treh ravni. Vidna posledica obeh je zmanjšano število stranic, torej tudi zmanjšan obseg. Izračuni so nam podali, da celoten obseg, ki je sestavljen iz zunanjega (24 stranic), meri 768 mm. Kot prej je potrebno tudi tu izračun in razkritje koeficienta širjenja. S pomočjo programa Wolfram Alpha smo ugotovili, da je natanko 2. Če poznamo točno vrednost Zlatega reza nam je že s prvim pogledom povsem jasno, da tukaj z njim nimamo opravka. Pomembno je tudi vedeti, da bi se koeficient širitve moral ponoviti iz druge v tretjo stopnjo, da bi lahko dokazali obstoj novega razmerja. Razburljivo je dejstvo, da se.

Stopnja	Obseg	Koeficient	Razmerje
Bela	192mm	/	/
Modra	384mm	2	Krat 2
Rdeča	768mm	2	Krat 2

Tabela 9: Prikaz meritev Motiva 2 iz središča

Končna razprava in zaključek

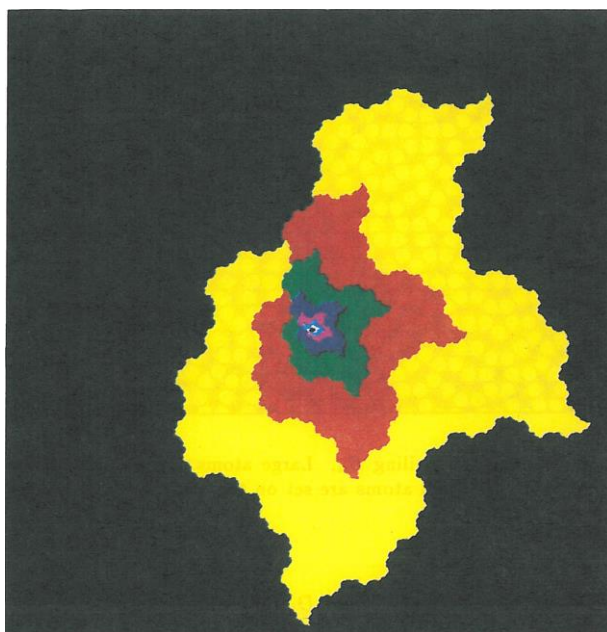
Končna razprava

V tem delu raziskovanja smo razširili način analiziranja posameznih motivov. Namesto samega merjenja stranic smo tukaj dodali še merjenje obsegov ter primerjavo le-teh med seboj. Na ta način želimo izračunati razmerja med stranicami ter razmerja med obsegi likov v motivih. Tudi tokrat nam je bil v pomoč računalniški program Inkscape, kjer smo izvedli meritve in obravnave. Za nadaljnje izračuna smo uporabljali program Wolfram Alpha.

Posebnost teh treh motivov v drugi analizi pa je prav tako tudi sama postavitev likov v njih. V prejšnjih obravnavanih vzorcih smo v vsakem izmed njih razbrali obliko, konkreten motiv npr. Motiv modre zvezde. Tukaj pa, predvsem v prvem vzorcu, ne vidimo jasne tvorbe likov. Tudi pri naslednjih dveh oblike, kot smo jih vajeni iz prvega dela raziskovanja, ni.

Analizirali smo predvsem zunanje obsege pri pojavnih ravneh, s čimer smo želeli izvedeti število, ki množi zunanje obsege prejšnjih stopenj in pripomore k nastanku nove. Pozorni smo bili na konkretno širitev ter obseg le-te. Širitev je lahko sklenjena, pogostokrat pa tudi ne. V našem primeru ni bilo sklenjene širitve iz druge v tretjo stopnjo, vendar to tokrat ni pomembno.

Vse konkretne širitve oziroma obsegi absolutnih širitvev so se večale s koeficientom 2, kar pomeni, da ne poteka v skladu z Zlatim rezom. To pa pomeni, da obstaja razmerje poleg zlatega reza, zlatega reza polovic ali kvadrata in je prisotno v naših drugih analiziranih motivih, motivih Nastajanja 1 in 2.



Slika 36: Večje širitve motivov V nastajanju

Zaključek

Zaključimo lahko s trditvijo, da so razmerja Penroseovih ploščic vsekakor vredna raziskave. Vse naše meritve so točne, narejene računalniško, oznake na slikah pa so zgolj za prikaz in niso popolnoma natančne. Z uporabo slik smo bralcu naloge želeli omogočiti čim boljši vpogled v naše raziskovanje.

S pomočjo tabel smo prikazali rezultate naših izračunov, mnoge tudi po večkratni obravnavi. Vsako razmerje smo namreč izračunali še enkrat. Najprej smo s pomočjo grafičnih programov ponovno analizirali vse stranice, diagonale in osnovnice likov. Ta postopek je bil pri zadnjem motivu prve analize, torej motivu sonca, potreben še dvakrat, saj so vrednosti odstopale. V tretjem poskusu smo dobili razmerje zlatega reza. Če nam tega ne bi uspelo doseči, bi potrdili našo domnevo o obstoju dodatnih povezav likov in njihovih stranic v motivu.

Rezultati prve analize lahko potrdijo le prisotnost zlatega reza, zlatega reza polovic ali njegovega kvadrata. Novega razmerja v teh motivih nismo našli.

Bistveno boljše rezultate nam je podala druga analiza, kjer smo s pomočjo Inkscapea ter programa Wolfram Alpha v treh novih motivih raziskovali razmerja. Novi motivi, sestavljeni na povsem drugačen način, so bili boljša predpostavka raziskavi. Prvi izmed njih, motiv Prepletenega romba, ni imel določene začetne točke, zato smo z raziskovanjem pričeli kar v kotih motiva in tako s pomočjo izračunov prišli do središča. V pomoč nam je bila teorija nastajanja tega vzorca. Izmerili smo sredinski "krog" ter izmerili njegov obseg, nato pa še obseg "kroga", ki mu sledi.

Pri motivih V nastajanju 1 in 2 pa je začetna točka lepo označena. Ti motivi so bili deležni dodatne raziskave, saj smo bili pozorni (poleg klasičnih podatkov) tudi na obsege samih likov, pri motivih V nastajanju 1 in 2 pa še na posamezne stopnje ter njihove koeficiente širjenja. S primerjavo števila koeficienta z zlatimi rezi smo želeli ugotoviti, če obstaja neko dodatno razmerje, katerega najdba je bil naš prvotni cilj. Koeficient bi se moral ponoviti iz druge v tretjo stopnjo, ta se tudi je. **Vse to pomeni, da smo odkrili novo razmerje.**

To poglavje bo predmet raziskave novih poskusov razumevanja narave, ki je ključno za razumevanje življenja na zemlji. Obstoj tega razmerja bo zagotovo nekega dne človeškemu umu odprl okno v še neraziskano poglavje sveta narave. Zdaj, ko je naša hipoteza potrjena in imamo novo razmerje, lahko celotno raziskovalno delo zaključimo s sledečim vprašanjem: **Kakšen je njegov pomen?**

Viri in literatura

Teorija in programi

1. <https://inkscape.org/en/> (preverjeno 7.3.)
2. <http://preshing.com/20110831/penrose-tiling-explained/> (trikotniki z zlatimi rezi, preverjeno 7.3.)
3. <http://www.wolframalpha.com/> (preverjeno 7.3.)
4. http://www.coreldraw.com/us/?sso_test=true (corel draw) (preverjeno 7.3.)
5. <http://www2.arnes.si/~jzaloh/The%20Omega%20Theory.pdf> (preverjeno 7.3.)
6. Lu, Peter J., and Paul J. Steinhardt. "Decagonal and Quasi-crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture." *Science* 315 (2007): 1106-1110. (preverjeno 7.3.)
7. Grünbaum, Branko; Shephard, G. C. (1987), *Tilings and Patterns*, New York: W. H. Freeman, ISBN 0-7167-1193-1. (preverjeno 7.3.)
8. <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/penrose.html> (preverjeno 7.3.)
9. <http://www.goldennumber.net/penrose-tiling/> (preverjeno 7.3.)
10. <http://lotsasplainin.blogspot.com/2011/06/math-of-penrose-tiles-part-2-golden.html> (preverjeno 7.3.)
11. http://inac.cea.fr/sp2m/L_Sim/Publications/1992/Godreche_Lancon-1992-5_fold_non_Pisot_tiling.pdf (preverjeno 12.3.)
12. https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/focus/Gardner_PenroseTilings1-1977.pdf (preverjeno 12. 3.)
13. <http://math.arizona.edu/~ura/034/McMurdie.Christopher/paper.pdf> (preverjeno 12.3.)
14. Penrose, Roger (1974), "The role of aesthetics in pure and applied mathematical research" (preverjeno 13.3.)

*vsi navedeni datumi so za leto 2015.

Slike

1. <http://www.raora.com/image/data/gimnazija-kranj-logo.jpg> (preverjeno 7.3.)
2. [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose_Tiling_\(Rhombi\).svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose_Tiling_(Rhombi).svg) (preverjeno 7.3.)
3. <http://euler.slu.edu/escher/index.php/File:Penrose-patch.svg> (preverjeno 7.3.)
4. [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose_Tiling_\(P1\).svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose_Tiling_(P1).svg) (preverjeno 7.3.)
5. <https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/236x/df/0b/52/df0b52057c77ec678a9ec9273c4bc441.jpg> (preverjeno 7.3.)
6. <http://i.ytimg.com/vi/pEW7lcYirM8/maxresdefault.jpg> (preverjeno 7.3.)
7. <http://www.biopolymath.net/2012/01/nobel-prize-in-chemistry-2011-for.html> (preverjeno 7.3.)
8. <http://imgarcade.com/1/rhombus-tessellation/> (preverjeno 7.3.)
9. http://inac.cea.fr/sp2m/L_Sim/Publications/1992/Godreche_Lancon-1992-5_fold_non_Pisot_tiling.pdf (preverjeno 12.3.)
10. Penrose, Roger (1974), "The role of aesthetics in pure and applied mathematical research" (preverjeno 13.3.)

*ostale slike, uporabljene v poglavju Eksperimentalni del - analizirani primeri 1 in analizirani primeri 2, so produkt lastne raziskave v programu Inkscape in slikarju.

*vsi navedeni datumi so za leto 2015.