

Preizkus znanja v 3d iz geometrije (do prizme), 29. 5. 2012

(vse naloge so enakovredne)

1. Romb z diagonalama $e = 24\text{ cm}$ in $f = 70\text{ cm}$ ima enak obseg kot pravokotnik, katerega osnovnica je enaka krajši diagonali romba. Kateri lik ima večjo ploščino in za koliko?
2. Izračunajte ploščino trikotnika, pri katerem sta znani dve stranici, $b = 85\text{ cm}$ in $c = 60\text{ cm}$, in višina na tretjo od stranic $v_a = 36\text{ cm}$.
3. V trapezu s ploščino $S = 190\text{ cm}^2$ je višina 8 cm , osnovnici pa sta v razmerju $3 : 2$. Izračunajte dolžini osnovnic.
4. Tri cevi s premeri 18 cm , 24 cm in 72 cm bi radi nadomestili z eno, katere pretok bo enak vsem trem opisanim cevem skupaj. Izračunajte premer te cevi na dve mesti natančno.
5. V trikotniku ABC velja $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 5 : 12 : 13$. Izračunajte velikosti kotov. Pomagajte si s sinusnim in nato s kosinusnim izrekom.
6. Robovi osnovne ploskve pokončne tristrane prizme merijo 11 cm , 13 cm in 20 cm , njena prostornina meri 90 cm^3 . Izračunajte površino prizme. Pomagajte si s Heronovim obrazcem.

1. Romb z diagonalama $e = 24 \text{ cm}$ in $f = 70 \text{ cm}$ ima enak obseg kot pravokotnik, katerega osnovnica je enaka krajši diagonali romba. Kateri lik ima večjo ploščino in za koliko? S177/437

Pomembna lastnost pri rombu sta pravokotni diagonali in poleg običajnega obrazca za ploščino paralelograma lahko uporabimo še obrazec za deltoid: $S = \frac{e \cdot f}{2}$.

Stranice pri rombu (vse štiri so enake) označimo z a_r , pri pravokotniku pa z a_p in b_p .

Iz podatkov sledi $ob_r = 4a_r = ob_p = 2a_p + 2b_p$ in $a_p = e = 24$.

Ker sta diagonali pravokotni in se razpolavljata, lahko s Pitagorovim izrekom

izračunamo a_r : $a_r = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 + 35^2} = \sqrt{1369} = 37 \text{ cm} \Rightarrow ob_r = 148 \text{ cm}$

$ob_p = 2a_p + 2b_p = 48 + 2b_p = 148 \Rightarrow b_p = 50 \text{ cm}$

Sedaj primerjajmo obe ploščini: $S_r = \frac{24 \cdot 70}{2} = 840 \text{ cm}^2$ in $S_p = a_p \cdot b_p = 24 \cdot 50 = 1200 \text{ cm}^2$

Večjo ploščino ima pravokotnik in sicer za 360 cm^2 .

2. Izračunajte ploščino trikotnika, pri katerem sta znani dve stranici, $b = 85 \text{ cm}$ in $c = 60 \text{ cm}$, in višina na tretjo od stranic $v_a = 36 \text{ cm}$. S181/460

* Lahko bi računali s kotnimi funkcijami, še lažje pa s Pitagorovim izrekom. Stranico a sestavljata pravokotni projekciji ostalih dveh stranic nanjo. Označimo jih z a_b in a_c .

S Pitagorovim izrekom dobimo: $a_b = \sqrt{b^2 - v_a^2} = \sqrt{5929} = 77 \text{ cm}$ in

$a_c = \sqrt{c^2 - v_a^2} = \sqrt{2304} = 48 \text{ cm} \Rightarrow a = a_b + a_c = 125 \text{ cm}$

Ploščina trikotnika pa je $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{125 \cdot 36}{2} = \underline{\underline{2250 \text{ cm}^2}}$

** S kotnimi funkcijami pa bi računali takole:

Oba kota, ki sestavljata kot α označimo z α_b in z α_c . Sedaj veljata naslednji zvezi

$\cos \alpha_b = \frac{v_a}{b} = \frac{36}{85} \Rightarrow \alpha_b = 64,94^\circ$ in $\cos \alpha_c = \frac{v_a}{c} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha_c = 53,13^\circ$

$\alpha = \alpha_b + \alpha_c = 118,07^\circ$ Obrazec za ploščino z uporabo kota je $S = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \underline{\underline{2250 \text{ cm}^2}}$.

*** Tretji način: $\sin \beta = \frac{v_a}{c} = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = 36,87^\circ$ in $\sin \gamma = \frac{v_a}{b} = \frac{36}{85} \Rightarrow \gamma = 25,06^\circ$

$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 118,07^\circ \Rightarrow S = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \underline{\underline{2250 \text{ cm}^2}}$.

3. V trapezu s ploščino $S = 190 \text{ cm}^2$ je višina 8 cm , osnovnici pa sta v razmerju $3 : 2$.

Izračunajte dolžini osnovnic. S186/491

Z upoštevanjem razmerja osnovnic, $a : c = 3 : 2$, lahko označimo $a = 3k$ in $c = 2k$.

Obrazec za ploščino trapeza je $S = \frac{a+c}{2} \cdot v \Rightarrow \frac{3k+2k}{2} \cdot 8 = 190 \Rightarrow 5k \cdot 4 = 190 \Rightarrow k = \frac{19}{2}$

Dolžini osnovnic sta $a = 3 \cdot \frac{19}{2} = \underline{\underline{28,5 \text{ cm}}}$ in $b = 2 \cdot \frac{19}{2} = \underline{\underline{19 \text{ cm}}}$

4. Tri cevi s premeri 18 cm , 24 cm in 72 cm bi radi nadomestili z eno, katere pretok bo enak vsem trem opisanim cevem skupaj. Izračunajte premer te cevi na dve mesti natančno. S199/544

Sešteti moramo vse tri preseke (ploščine krogov).

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \quad S_1 = \pi r_1^2 = \pi \cdot 9^2 = 81\pi \quad S_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi$$

$$S_3 = \pi r_3^2 = \pi \cdot 36^2 = 1296\pi \quad S = 81\pi + 144\pi + 1296\pi = 1521\pi = \pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 1521 \Rightarrow r = 39 \Rightarrow \underline{\underline{2r = 78 \text{ cm}}}$$

5. V trikotniku ABC velja $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 5 : 12 : 13$. Izračunajte velikosti kotov. podobna S203/596

Sinusni izrek pravi $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c = 5 : 12 : 13$, zato lahko zapišemo $a = 5k$, $b = 12k$ in $c = 13k$.

$$\text{Kote izračunamo po kosinusnem izreku} \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{144k^2 + 169k^2 - 25k^2}{2 \cdot 12k \cdot 13k} = \frac{288}{312} = \frac{12}{13} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 22,6^\circ}}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ab} = \frac{25k^2 + 169k^2 - 144k^2}{2 \cdot 5k \cdot 13k} = \frac{50}{130} = \frac{5}{13} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 67,4^\circ}}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{25k^2 + 144k^2 - 169k^2}{2 \cdot 5k \cdot 12k} = \frac{0}{120} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 90^\circ}}$$

Lahko pa bi razmišljali tudi drugače: Iz izkušenj poznamo trojico števil 5, 12 in 13, da je pitagorejska trojica, ker je $5^2 + 12^2 = 13^2$ (podobno velja za trojico 3, 4 in 5). Zato velja $a^2 + b^2 = c^2$ in imamo torej opraviti s pravokotnim trikotnikom, $\gamma = 90^\circ$. Zato velja tudi $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13}$ in $\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13}$ in dobimo enaka kota kot prej, z uporabo kosinusnega izreka.

6. Robovi osnovne ploskve pokončne tristrane prizme merijo 11 cm, 13 cm in 20 cm, njena prostornina meri 90 cm^3 . Izračunajte površino prizme. S224/649

Pri obeh obrazcih, za prostornino in za površino prizme nastopa ploščina osnovne ploskve. Ker je osnovna ploskev trikotnik z danimi stranicami,

uporabimo Heronov obrazec $O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$s = \frac{11+13+20}{2} = 22 \quad O = \sqrt{22(22-11)(22-13)(22-20)} = \sqrt{22 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 2} = 11 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{66}$$

$$V = O \cdot v = 90 \Rightarrow 66 \cdot v = 90 \Rightarrow v = \underline{\underline{\frac{15}{11}}} \quad \text{Ker je prizma pokončna, je stranski rob enak}$$

$$\text{višini. Plašč sestavljajo trije pravokotniki. } pl = 11 \cdot \frac{15}{11} + 13 \cdot \frac{15}{11} + 20 \cdot \frac{15}{11} = 44 \cdot \frac{15}{11} = \underline{60}$$

$$\text{Površina prizme je } P = 2 \cdot O + pl = 132 + 60 = \underline{\underline{192 \text{ cm}^3}}$$