

Preizkus znanja 2e, 24. 5. 13 (vektorji)

Vsaka naloga je vredna 8 točk, za zadostno oceno 50 % točk

1. V trikotniku ABC leži točka D na stranici AB tako, da je $|AD| : |DB| = 2 : 1$, točka E pa leži na stranici BC tako, da je $|BE| : |BC| = 1 : 5$. Točka F je presek daljic AE in DC . Izračunajte razmerje daljic $|DF| : |FC|$.
2. Točka C leži na daljici AB , tako da je $|AC| : |CB| = 2 : 1$.
Zapišite koordinati točke C , če je $A(-1, 2, -5)$ in $B(2, -4, 4)$.
3. Poiščite y in z , da bo točka $C(8, y, z)$ ležala na premici skozi točki $A(2, -1, 3)$ in $B(-1, 2, 4)$.
4. a) V pravokotniku $ABCD$ je $|\overrightarrow{AB}| = 8$ in $|\overrightarrow{BC}| = 6$. Izračunajte $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
b) V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ s stranico 5 izrazite vektorja $\overrightarrow{CE}$ in $\overrightarrow{DF}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ in izračunajte skalarni produkt $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DF}$.
5. a) Določite x tako, da bosta vektorja $\vec{a} = (x, 5, -3)$ in $\vec{b} = (1, -6, -1)$ enako dolga.
b) Za katero število z bo kot med vektorjema $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ in $\vec{b} = (-1, -1, z)$ enak 45° ?
6. Na minuto natančno izračunaj vse kote trikotnika, ki ima oglišča $A(3, -3, 5)$, $B(-1, 4, 8)$ in $C(1, -3, 4)$.

Preizkus znanja 2e, 24. 5. 13 (vektorji)

Vsaka naloga je vredna 8 točk, za zadostno oceno 50 % točk

1. V trikotniku ABC leži točka D na stranici AB tako, da je $|AD| : |DB| = 2 : 1$, točka E pa leži na stranici BC tako, da je $|BE| : |BC| = 1 : 5$. Točka F je presek daljic AE in DC . Izračunajte razmerje daljic $|DF| : |FC|$.

Rešitev: Za bazo si izberemo vektorja, na katerima poznamo delilno razmerje:

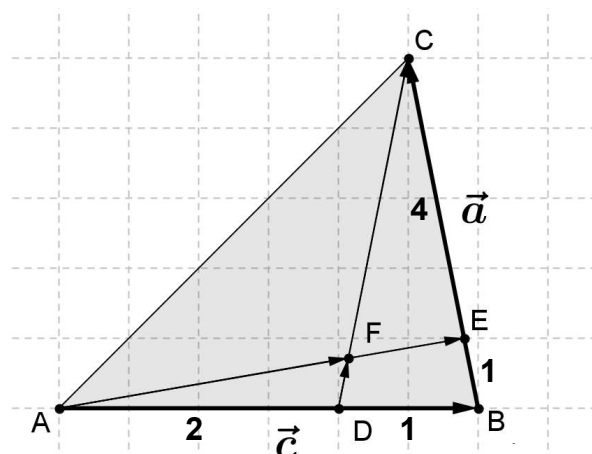
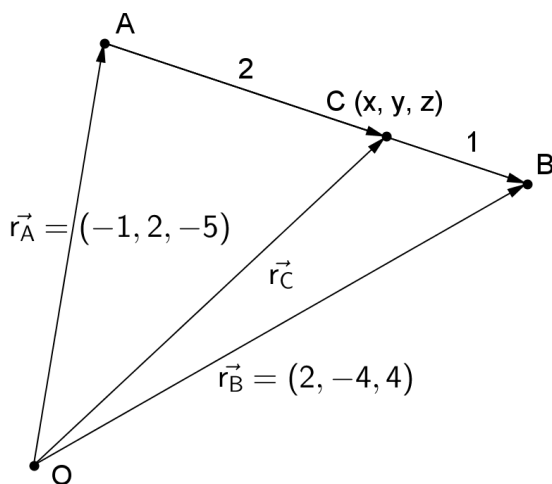
$\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ in v njej izrazimo vektor $\overrightarrow{DF}$.

$$\overrightarrow{DF} = m \overrightarrow{DC} = m \left(\frac{1}{3} \vec{c} + \vec{a} \right) = \frac{m}{3} \vec{c} + m \vec{a}$$

$$\overrightarrow{DF} = -\frac{2}{3} \vec{c} + \overrightarrow{AF} = -\frac{2}{3} \vec{c} + n \overrightarrow{AE} = -\frac{2}{3} \vec{c} + n \left(\vec{c} + \frac{1}{5} \vec{a} \right) = \left(n - \frac{2}{3} \right) \vec{c} + \frac{n}{5} \vec{a}$$

$$\text{Sledi } \frac{m}{3} = n - \frac{2}{3} \text{ in } m = \frac{n}{5} \Rightarrow \frac{m}{3} = 5m - \frac{2}{3} \Rightarrow m = 15m - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14m = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{7} \Rightarrow \underline{\underline{|DF| : |FC| = 1 : 6}}$$



2. Točka C leži na daljici AB , tako da je $|AC| : |CB| = 2 : 1$.

Zapišite koordinate točke C , če je $A = (-1, 2, -5)$ in $B = (2, -4, 4)$.

Rešitev: Koordinate točke $C = (x, y, z)$ zapišemo kot komponente

ustreznega krajevnega vektorja $\vec{r}_C = (x, y, z)$ in tudi $\vec{r}_A = (-1, 2, -5)$, $\vec{r}_B = (2, -4, 4)$.

Iz skice razberemo $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (2, -4, 4) - (-1, 2, -5) = (3, -6, 9)$ in $\vec{r}_C = \vec{r}_A + \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} (3, -6, 9) = (2, -4, 6) \quad \vec{r}_C = \vec{r}_A + \overrightarrow{AC} = (-1, 2, -5) + (2, -4, 6) = (1, -2, 1)$$

Točka C ima torej koordinate (1, -2, 1).

3. Poiščite y in z , da bo točka $C(8, y, z)$ ležala na premici skozi točki $A(2, -1, 3)$ in $B(-1, 2, 4)$.

Rešitev: Koordinate točke $C = (x, y, z)$ zapišemo kot komponente

ustreznega krajevnega vektorja $\vec{r}_C = (8, y, z)$ in tudi $\vec{r}_A = (2, -1, 3)$, $\vec{r}_B = (-1, 2, 4)$.

Pogoj, da bo točka C ležala na premici skozi točki A in B je kolinearost vektorjev,

na primer $\vec{AB}$ in $\vec{AC} \Rightarrow \vec{AC} = m\vec{AB}$.

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-1, 2, 4) - (2, -1, 3) = (-3, 3, 1)$$

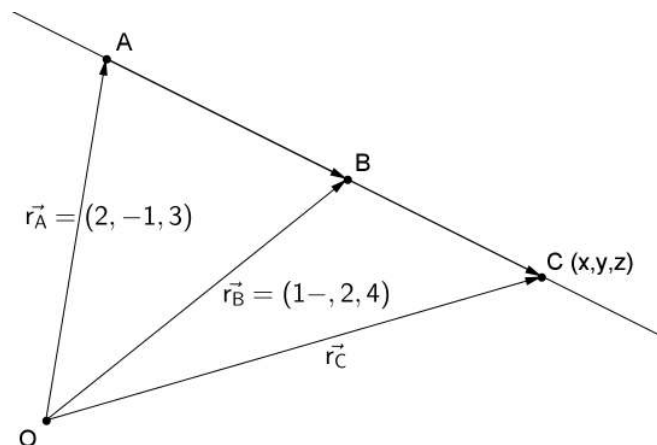
$$\vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (8, y, z) - (2, -1, 3) = (6, y+1, z-3)$$

$$\vec{AC} = m\vec{AB} \Rightarrow (6, y+1, z-3) = m(-3, 3, 1) \Rightarrow$$

$$6 = -3m \Rightarrow m = -2$$

$$\Rightarrow y+1 = 3m \Rightarrow y+1 = -6 \Rightarrow \underline{\underline{y = -7}}$$

$$z-3 = m \Rightarrow z-3 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{z = 1}}$$



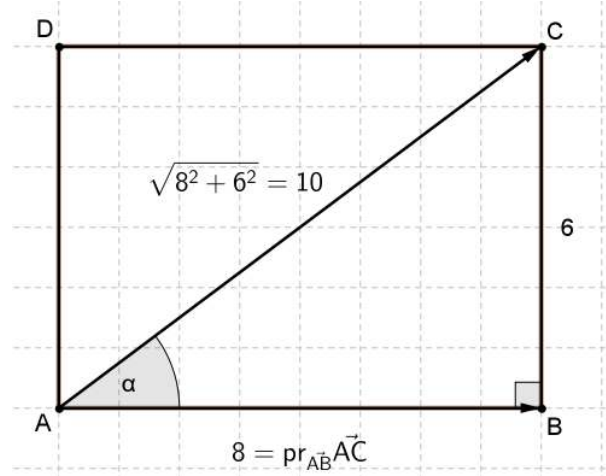
4. a) V pravokotniku $ABCD$ je $|\vec{AB}| = 8$ in $|\vec{BC}| = 6$. Izračunajte $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$.

Rešitev: $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha$ α je kot med vektorjema $\vec{AC}$ in $\vec{AB}$

Po Pitagorovem izreku je $|\vec{AC}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Ker je $\triangle ABC$ pravokoten, velja $\cos \alpha = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$$|\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha = 10 \cdot 8 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 64}}$$



Lahko pa bi računali tudi po opredelitvi skalarnega produkta s projekcijo:

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot pr_{\vec{AB}} \vec{AC} = 8 \cdot 8 = 64$$

b) V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ s stranico 5 izrazite vektorja $\vec{CE}$ in $\vec{DF}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{CD}$ in izračunajte skalarni produkt $\vec{CE} \cdot \vec{DF}$.

$$\text{Rešitev: } \vec{CE} = \vec{b} - \vec{a} \quad \vec{DF} = -\vec{b} - 2\vec{a}$$

Iz skice razberemo, da kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ meri 120° .

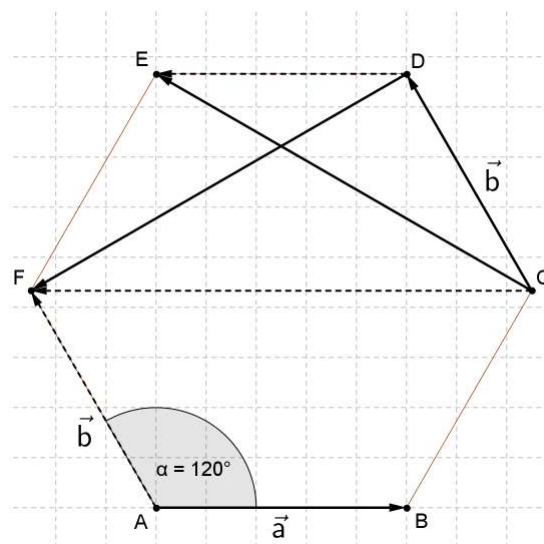
$$\vec{CE} \cdot \vec{DF} = (\vec{b} - \vec{a})(-\vec{b} - 2\vec{a}) =$$

$$= -\vec{b}^2 + \vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}^2 = 2\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} - \vec{b}^2 =$$

$$= 2a^2 - ab \cos 120^\circ - b^2 =$$

$$= 2 \cdot 25 - 5 \cdot 5 \cdot (-\cos 60^\circ) - 25 =$$

$$= 50 + 25 \cdot \frac{1}{2} - 25 \Rightarrow \underline{\underline{\vec{CE} \cdot \vec{DF} = 37,5}}$$



5. a) Določite x tako, da bosta vektorja $\vec{a} = (x, 5, -3)$ in $\vec{b} = (1, -6, -1)$ enako dolga.

Rešitev: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = b^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} \Rightarrow (x, 5, -3) \cdot (x, 5, -3) = (1, -6, -1) \cdot (1, -6, -1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 + 25 + 9 = 1 + 36 + 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1,2} = \pm 2}}$

b) Za katero število z bo kot med vektorjema $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ in $\vec{b} = (-1, -1, z)$ enak 45° ?

Rešitev: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, -2, 2) \cdot (-1, -1, z)_{\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}=(1,-2,2)} = -1 + 2 + 2z = a \cdot b \cdot \cos 45^\circ =$
 $= \sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1+1+z^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ Dobili smo enačbo $1 + 2z = 3 \cdot \sqrt{2+z^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (1+2z)^2 = 9 \cdot (2+z^2) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot (1+4z+4z^2) = 18+9z^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2+8z+8z^2 = 18+9z^2 \Rightarrow 0 = z^2 - 8z + 16 \Rightarrow (z-4)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{z=4}}$

6. Na minuto natančno izračunaj vse kote trikotnika, ki ima oglišča $A(3, -3, 5)$, $B(-1, 4, 8)$ in $C(1, -3, 4)$.

Rešitev: Označimo vektorje stranic $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$

Sedaj poiščemo komponentni zapis teh vektorjev $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = (1, -3, 4) - (-1, 4, 8) =$
 $= (2, -7, -4)$ $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (1, -3, 4) - (3, -3, 5) = (-2, 0, -1)$

$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-1, 4, 8) - (3, -3, 5) = (-4, 7, 3)$

Za kote bomo potrebovali skalarne produkte vseh vektorjev $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -7, -4) \cdot (-2, 0, -1) =$

$= -4 + 0 + 4 = 0$ $\vec{b} \cdot \vec{c} = (-2, 0, -1) \cdot (-4, 7, 3) = 8 + 0 - 3 = 5$

$\vec{c} \cdot \vec{a} = (-4, 7, 3) \cdot (2, -7, -4) = -8 - 49 - 12 = -69$

Ker velja $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, sta vektorja pravokotna in je kot γ pravi kot. Ostala dva kota sta zato ostra (skalarni produkt je pozitiven) in komplementarna (skupaj merita 90°).

$$\cos \alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{5}{\sqrt{4+0+1} \cdot \sqrt{16+49+9}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{74}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 74^\circ 56'}}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{69}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{4+49+16}} = \frac{69}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{69}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 15^\circ 4'}}$$

Kot β bi lahko izračunali tudi drugače: $\beta = 90^\circ - \alpha$