

Ponovitev preizkusa znanja iz Vietovega pravila, tangente na parabolo in kompleksnih števil

Vsaka naloga je vredna 8 točk, največje število točk je 40.

Za zadostno je potrebnih vsaj 20 točk, za dobro 25, za prav dobro 30, za odlično pa vsaj 35 točk.

Skupno število točk	Ocena
---------------------	-------

število točk od 8

- 1.) Dana je množica kvadratnih enačb $mx^2 + (m-1)x - m - 3 = 0$, pri čemer je m poljubno realno število. Za katero število m bosta rešitvi enačbe:

- a) nasprotni števili;
b) obratni števili?

Rešitev

Vietovo pravilo $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{1-m}{m}$ in $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m-3}{m}$

- a) $x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$ rešitvi sta nasprotni

Iz prve Vietove enačbe dobimo:

$$\frac{1-m}{m} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{m = 1}}$$

ni zahteva naloge $\Rightarrow [m = 1$ vstavimo v kvadratno enačbo enačbo $x^2 + (1-1)x - 1 - 3 = 0$

Enačba $x^2 - 4 = 0$ in rešitvi $x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = -2]$

- b) $x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 x_2 = 1$ rešitvi sta obratni

Iz druge Vietove enačbe dobimo:

$$\frac{-m-3}{m} = 1 \Rightarrow -m-3 = m \Rightarrow \underline{\underline{m = -\frac{3}{2}}}$$

ni zahteva naloge $\Rightarrow [m = -\frac{3}{2}$ vstavimo v kvadratno enačbo enačbo $-\frac{3}{2}x^2 + (-\frac{3}{2}-1)x + \frac{3}{2}-3 = 0 / (-2)$

Enačba $3x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-36}}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-5+i\sqrt{11}}{6}$ in $x_2 = \frac{-5-i\sqrt{11}}{6}$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{6}{-5-i\sqrt{11}} = -\frac{6(5-i\sqrt{11})}{(5+i\sqrt{11})(5-i\sqrt{11})} = -\frac{6(5-i\sqrt{11})}{36} = -\frac{5-i\sqrt{11}}{6} = x_1]$$

- 2.) Dani sta družini premic $y = kx - k - 1$ in parabol $y = x^2 + 3x - 2k + 2$.
Pri katerih vrednostih k bomo dobili tangento na parabolo.
Izračunajte dotikališče in narišite rešitev v koordinatnem sistemu.

Rešitev

Presekamo družini: $kx - k - 1 = x^2 + 3x - 2k + 2 \Rightarrow x^2 + 3x - kx - k + 3 = 0 \Rightarrow$
 $x^2 + (3 - k)x + (3 - k) = 0 \quad D = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (3 - k)^2 - 4(3 - k) = 0 \Rightarrow$
 $9 - 6k + k^2 - 12 + 4k = 0 \Rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow (k + 1)(k - 3) = 0 \Rightarrow \underline{k_1 = -1} \text{ in } \underline{k_2 = 3}$

Enačbi tangent sta $\underline{t_1: y = -x}$ $\underline{t_2: y = 3x - 4}$

Enačbi parabol sta $\underline{p_1: y = x^2 + 3x + 4}$ $\underline{p_2: y = x^2 + 3x - 4}$

Z rešitvijo enačbe $x^2 + (3 - k)x - (3 - k) = 0$ dobimo abscisi dveh dotikališč.

$k_1 = -1 \quad x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \text{ in } y_2 = 2 \quad \underline{D_1 = (-2, 2)}$

$k_2 = 3 \quad x^2 + 0x - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ in } y_1 = 0 - 4 = -4 \quad \underline{D_2 = (0, -4)}$

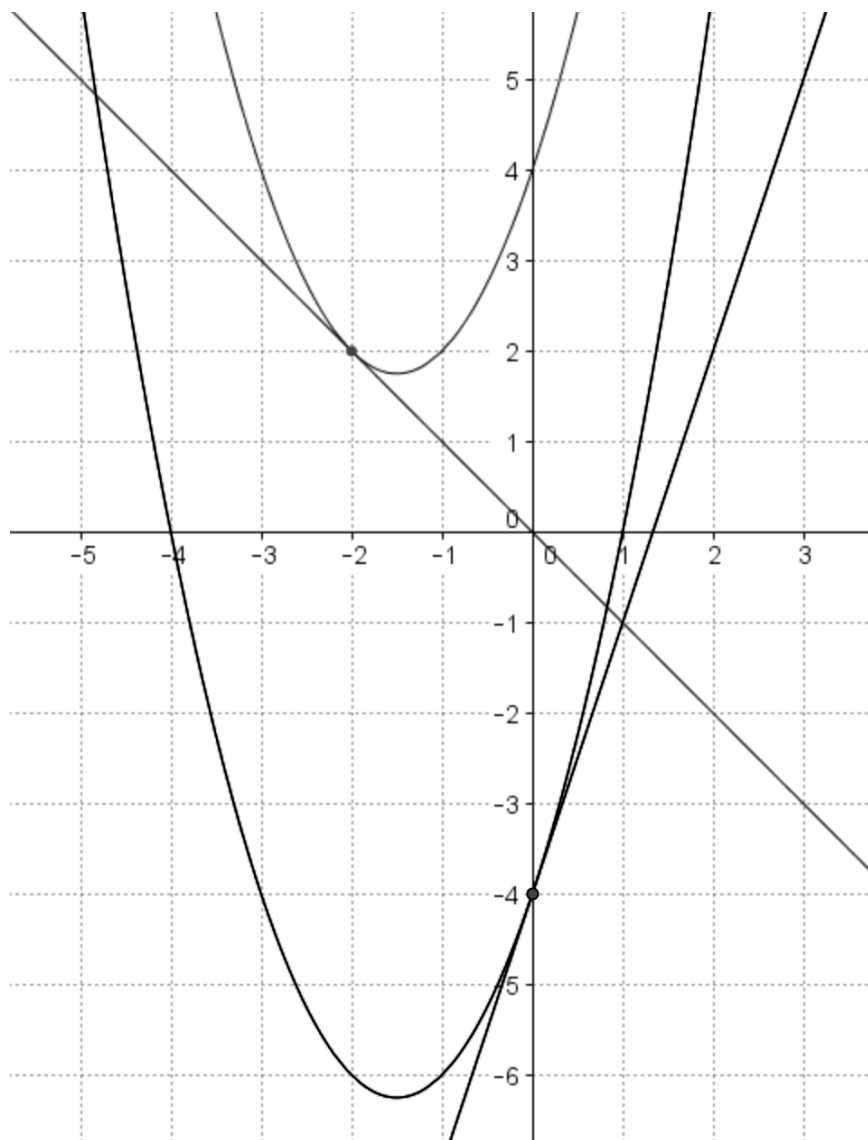
Grafa parabol

$p_1: y = x^2 + 3x + 4 \Rightarrow T_1 = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \Rightarrow$
 $T_1 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}\right)$

$y = x^2 + 3x + 4 \Rightarrow D = 9 - 16 < 0 \Rightarrow$
 nima ničel

$p_2: y = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow T_2 = (\text{isto, zgornji} - 8) \Rightarrow$
 $T_2 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4} = -6\frac{1}{4}\right)$

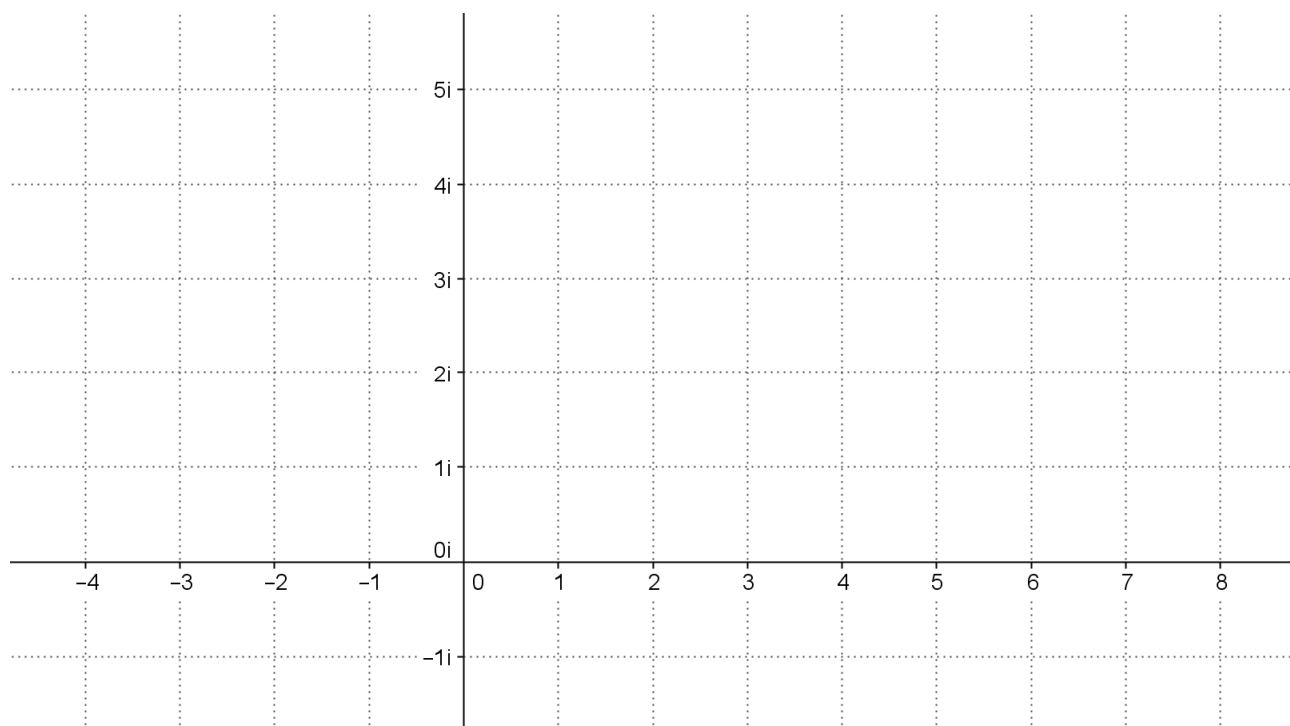
$y = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow y = (x + 4)(x - 1) \Rightarrow$
 $x_1 = -4 \text{ in } x_2 = 1$



3.) V kompleksni ravnini narišite množico in izračunajte njeno ploščino

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - 3i + 1| > 2, \operatorname{Re} z \geq -4, \operatorname{Im} z \leq 5, \operatorname{Im} z > \tfrac{1}{2} \operatorname{Re} z + 1\}$$

število
točk od 8



- 4) Rešite enačbo s kompleksnimi števili $(\overline{1-i})\bar{z} + 1 = |z| + z + 5i$ pravilno $-5i$.

Rešitev:

$$z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Rešitev z originalnim (nepravilnim) podatkom:

$$(1+i)(a-bi) + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} + a + bi + 5i$$

$$a - bi + ai + b + 1 = (\sqrt{a^2 + b^2} + a) + (b+5)i$$

$$(a+b+1) + (a-b)i = (\sqrt{a^2 + b^2} + a) + (b+5)i$$

$$a+b+1 = \sqrt{a^2 + b^2} + a \Rightarrow b+1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a-b = b+5 \Rightarrow a = 2b+5$$

$$b+1 = \sqrt{(2b+5)^2 + b^2} \Rightarrow b^2 + 2b + 1 = 4b^2 + 20b + 25 + b^2 \Rightarrow$$

$$4b^2 + 18b + 24 = 0 \Rightarrow 2b^2 + 9b + 12 = 0$$

$$D = 81 - 96 = -15 \Rightarrow \text{ni realnih rešitev za } b \Rightarrow \underline{\text{Enačba nima rešitve.}}$$

Rešitev z drugačnim (pravilnim) podatkom:

$$(1+i)(a-bi) + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} + a + bi - 5i$$

$$a - bi + ai + b + 1 = (\sqrt{a^2 + b^2} + a) + (b-5)i$$

$$(a+b+1) + (a-b)i = (\sqrt{a^2 + b^2} + a) + (b-5)i$$

$$a+b+1 = \sqrt{a^2 + b^2} + a \Rightarrow b+1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a-b = b+5 \Rightarrow a = 2b-5$$

$$b+1 = \sqrt{(2b-5)^2 + b^2} \Rightarrow b^2 + 2b + 1 = 4b^2 - 20b + 25 + b^2 \Rightarrow$$

$$4b^2 - 22b + 24 = 0 \Rightarrow 2b^2 - 11b + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$2b^2 - 8b - 3b + 12 = 0 \Rightarrow 2b(b-4) - 3(b-4) = 0$$

$$\Rightarrow (b-4)(2b-3) = 0 \Rightarrow b_1 = 4 \text{ in } b_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 \cdot 4 - 5 = 3 \text{ in } a_2 = 2 \cdot \frac{3}{2} - 5 = -2$$

$$\text{Rešitev } \underline{\underline{z_1 = 3 + 4i}} \text{ in } \underline{\underline{z_2 = -2 + \frac{3}{2}i}}$$

5) Z uporabo kotnih funkcij izračunajte, koliko je $\sqrt[3]{-26-18i}$.

Rešitev še grafično predstavite.

število
točk od 8

Rešitev

$$\text{mod}(-26-18i) = |-26-18i| = \sqrt{676+324} = \sqrt{1000}$$

$$r = \text{mod}(\sqrt[3]{-26-18i}) = \sqrt[3]{\text{mod}(-26-18i)} = \sqrt[3]{\sqrt{1000}} \Rightarrow r = \sqrt{10}$$

$$\arg(-26-18i) = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{18}{26}\right) = 214,695^\circ$$

$$\varphi = \arg(\sqrt[3]{\text{mod}(-26-18i)}) = \frac{1}{3} \arg(-26-18i) = \frac{1}{3} \cdot 214,695^\circ \Rightarrow \varphi = 71,565^\circ$$

$$\sqrt[3]{-26-18i} = a + bi \Rightarrow a = r \cdot \cos \varphi = 1 \text{ in } b = r \cdot \sin \varphi = 3$$

$$\sqrt[3]{-26-18i} = 1 + 3i$$

Sta še dve rešitvi, saj lahko argumentu dodamo večkratnike 360° ,

zato lahko tej rešitvi dodamo tretjino, torej večkratnike 120° .

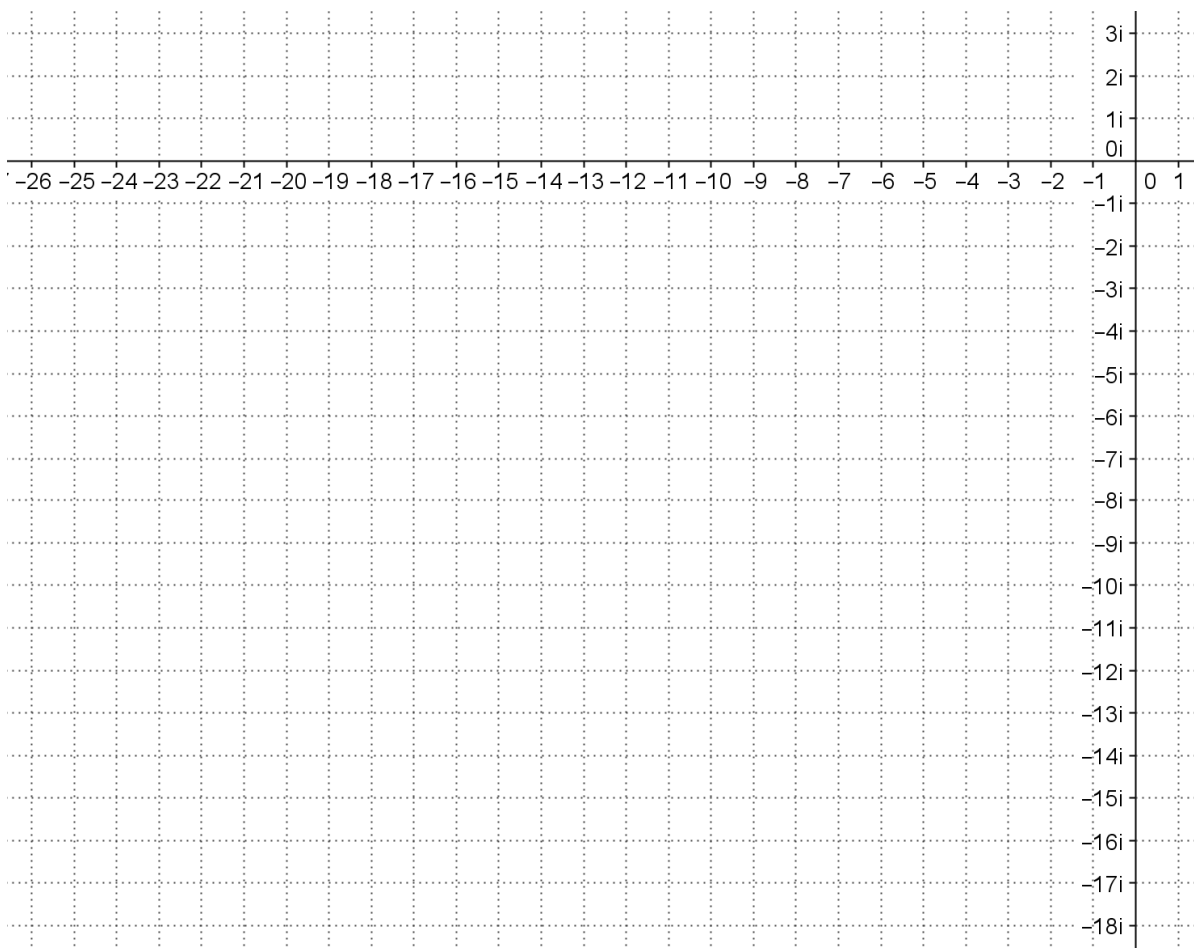
$$\varphi_1 = \varphi + 120^\circ \Rightarrow \varphi_1 = 191,565^\circ \quad \text{in} \quad \varphi_2 = \varphi + 240^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 311,565^\circ$$

$$\sqrt[3]{-26-18i} = a + bi \Rightarrow a = r \cdot \cos \varphi_1 = -3,098 \text{ in } b = r \cdot \sin \varphi_1 = -0,634$$

$$\sqrt[3]{-26-18i} = -3,098 - 0,634i$$

$$\sqrt[3]{-26-18i} = a + bi \Rightarrow a = r \cdot \cos \varphi_2 = 2,098 \text{ in } b = r \cdot \sin \varphi_2 = -2,366$$

$$\sqrt[3]{-26-18i} = 2,098 - 2,366i$$



Prostor za dodatne izračune