

Preizkus znanja iz Vietovega pravila, tangente na parabolo

Vsaka naloga je vredna 8 točk, največje število točk je 40.

Za zadostno je potrebnih vsaj 20 točk, za dobro 25, za prav dobro 30, za odlično pa vsaj 35 točk.

Skupno število točk	Ocena
---------------------	-------

- 1.) Za katero število k bo vsota rešitev enačbe $2x^2 - 2kx + 3k = 0$ dvakrat večja od njune razlike. Zapišite enačbo in poiščite rešitvi.

število točk od 8

Rešitev

Vietovo pravilo $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = k$ in $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3k}{2}$

Vsota je dvakrat večja od razlike rešitev $x_1 + x_2 = 2(x_1 - x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_1 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = 3x_2$

Vstavimo in dobimo sistem enačb z dvema neznankama

(1) $3x_2 + x_2 = k$ (2) $x_2 \cdot 3x_2 = \frac{3k}{2} \Rightarrow 3x_2^2 = \frac{3k}{2} \Rightarrow x_2^2 = \frac{k}{2}$

(1) $k = 4x_2$

Vstavimo v enačbo (2)

$x_2^2 = \frac{4x_2}{2} \Rightarrow x_2^2 = 2x_2 \Rightarrow x_2^2 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2(x_2 - 2) = 0$

1. rešitev $x_2 = 0, k = 0$ in $x_1 = 0$ in enačba $2x^2 = 0$ trivialna rešitev

2. rešitev $x_2 = 2, k = 8$ in $x_1 = 6$ in enačba $2x^2 - 16x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$

- 2.) Dani sta družini premic $y = kx - 3k - 1$ in parabol $y = x^2 - x - 2k$.
Pri katerih vrednostih k bomo dobili tangento na parabolo.
Izračunajte dotikališče in narišite rešitev v koordinatnem sistemu.

Rešitev

Presekamo družini: $kx - 3k - 1 = x^2 - x - 2k \Rightarrow x^2 - kx - x + k + 1 = 0$

$x^2 - (k+1)x + (k+1) = 0 \Rightarrow a = 1, b = -(k+1) \text{ in } c = k+1$

$D = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (k+1)^2 - 4(k+1) = 0 \Rightarrow (k+1)(k+1-4) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (k+1)(k-3) = 0 \Rightarrow \underline{k_1 = -1} \text{ in } \underline{k_2 = 3}$

Enačbi tangent sta $\underline{t_1: y = -x - 3}$ $\underline{t_2: y = 3x - 10}$

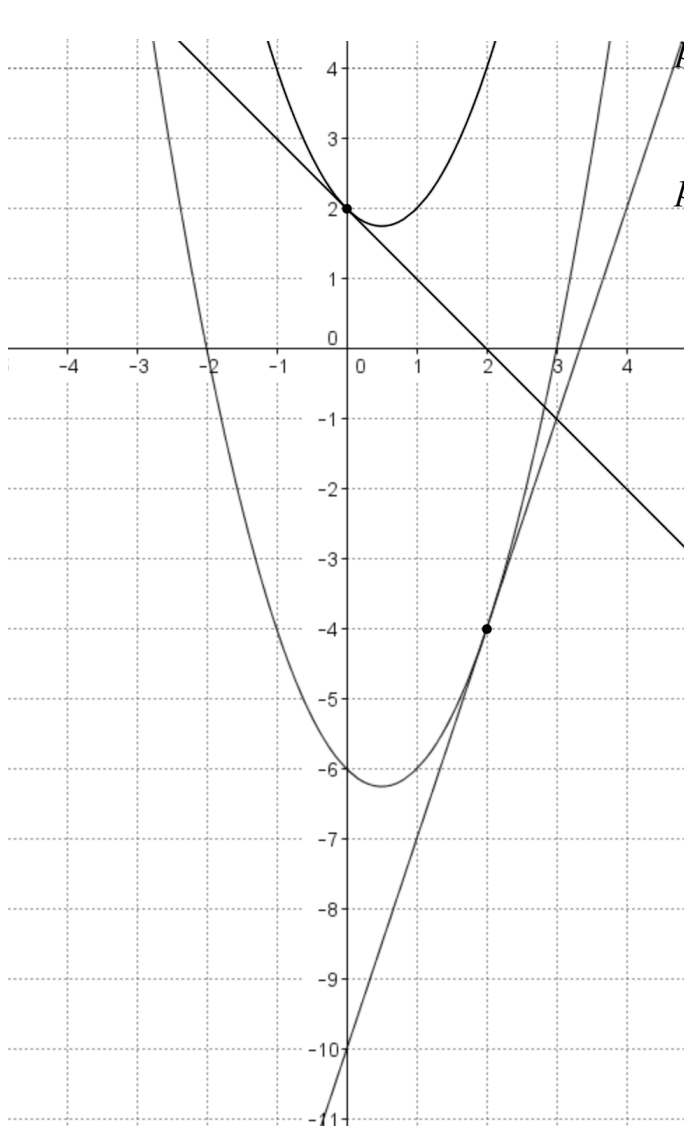
Enačbi parabol sta $\underline{p_1: y = x^2 - x + 2}$ $\underline{p_2: y = x^2 - x - 6}$

Z rešitvijo enačbe $x^2 - (k+1)x + (k+1) = 0$ dobimo abscisi dveh dotikališč.

$k_1 = -1 \quad x^2 - 0x + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ in } y_1 = -0 - 3 \quad \underline{D_1 = (0, -3)}$

$k_2 = 3 \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ in } y_2 = 6 - 10 \quad \underline{D_2 = (2, -4)}$

Grafa parabol



$p_1: y = x^2 - x + 2 \Rightarrow T_1 = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) \Rightarrow T_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}\right)$

$y = x^2 - x + 2 \Rightarrow D = 1 - 8 < 0 \Rightarrow \text{nima ničel}$

$p_2: y = x^2 - x - 6 \Rightarrow T_2 = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) \Rightarrow T_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4} = -6\frac{1}{4}\right)$

$y = x^2 - x - 6 \Rightarrow y = (x+2)(x-3) \Rightarrow x_1 = -2 \text{ in } x_2 = 3$

3.) V kompleksni ravnini narišite množico in izračunajte njeno ploščino

$$\{z \in \mathbb{C}; |z+1-3i| > 2, \operatorname{Re} z \geq -4, \operatorname{Im} z \leq 5, \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z + 1\}$$

Rešitev: $|z+1-3i| > 2 \Rightarrow |z - (-1+3i)| > 2$

Narišemo (črtkano) krožnico s središčem v $-1+3i$ in s polmerom 2.

Njena zunanost ustreza prvemu pogoju.

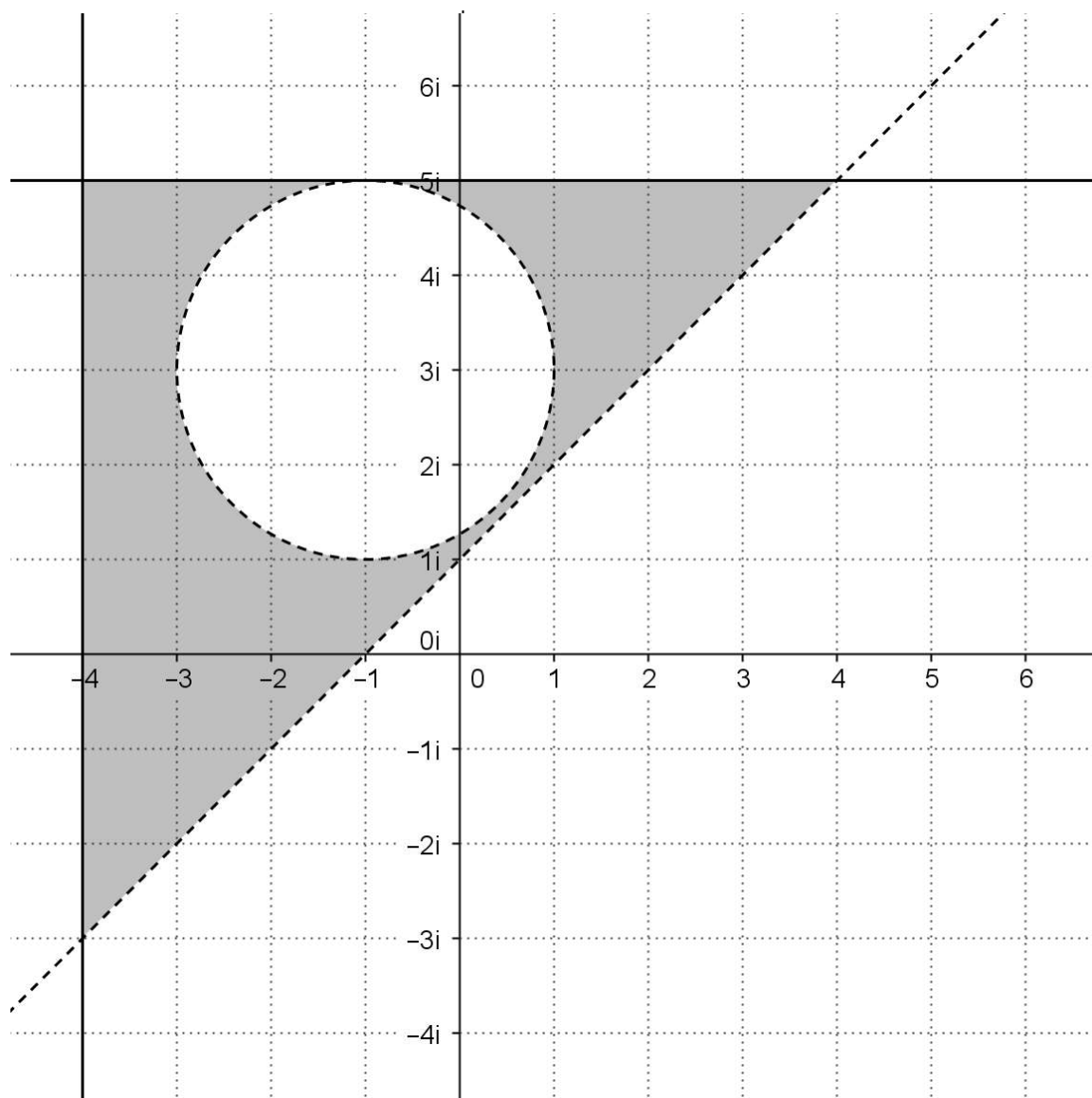
$$\operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z + 1 \Rightarrow y > x + 1$$

V kompleksni ravnini narišemo (črtkano) premico $y = x + 1$

Točke nad njo ustrezajo zadnjemu pogoju. Ostalo je razvidno z risbe.

Ploščina množice je ploščina trikotnika minus ploščina krožnice:

$$S = \frac{8 \cdot 8}{2} - \pi \cdot 2^2 \Rightarrow \underline{\underline{S = 32 - 4\pi}}$$



4) Rešite enačbo s kompleksnimi števili $i(\bar{z} + i) + 7 = |z| - z + 7i$.

V enačbi $i(\bar{z} + i) + 7 = |z| - z + 7i$ bomo zamenjali $z = a + bi$.

$$i(a - bi + i) + 7 = \sqrt{a^2 + b^2} - a - bi + 7i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ai + b + 6 = (\sqrt{a^2 + b^2} - a) + (7 - b)i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b + 6) + ai = (\sqrt{a^2 + b^2} - a) + (7 - b)i$$

Izenačimo realni in imaginarni komponenti obeh kompleksnih števil:

$$\underline{a = 7 - b} \text{ in } \underline{b + 6 = \sqrt{a^2 + b^2} - a} \Rightarrow a = 7 - b \text{ vstavimo v drugo enačbo}$$

$$b + 6 = \sqrt{49 - 14b + b^2 + b^2} - 7 + b \Rightarrow 13 = \sqrt{49 - 14b + 2b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 169 = 49 - 14b + 2b^2 \Rightarrow 2b^2 - 14b - 120 = 0 \Rightarrow b^2 - 7b - 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b - 12)(b + 5) = 0 \Rightarrow b_1 = 12 \text{ in } b_2 = -5 \Rightarrow a_1 = 7 - 12 = -5$$

$$\text{in } a_2 = 7 + 5 = 12 \Rightarrow \underline{\underline{z_1 = -5 + 12i \text{ in } z_2 = 12 - 5i}}$$

5) Z uporabo kotnih funkcij izračunajte, koliko je $\sqrt{-15+8i}$.

Rešitev še grafično predstavite.

število
točk od 8

Rešitev

$$\operatorname{mod}(-15+8i) = |-15+8i| = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$$

$$r = \operatorname{mod}(\sqrt{-15+8i}) = \sqrt{\operatorname{mod}(-15+8i)} = \sqrt{17} \Rightarrow \underline{r = \sqrt{17}}$$

$$\arg(-15+8i) = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{8}{15}\right) = 151,928^\circ$$

$$\varphi = \arg(\sqrt{-15+8i}) = \frac{1}{2} \arg(-15+8i) = \frac{1}{2} \cdot 151,928^\circ \Rightarrow \underline{\varphi = 75,964^\circ}$$

$$\sqrt{-15+8i} = a+bi \Rightarrow \underline{a = r \cdot \cos \varphi = 1} \text{ in } \underline{b = r \cdot \sin \varphi = 4}$$

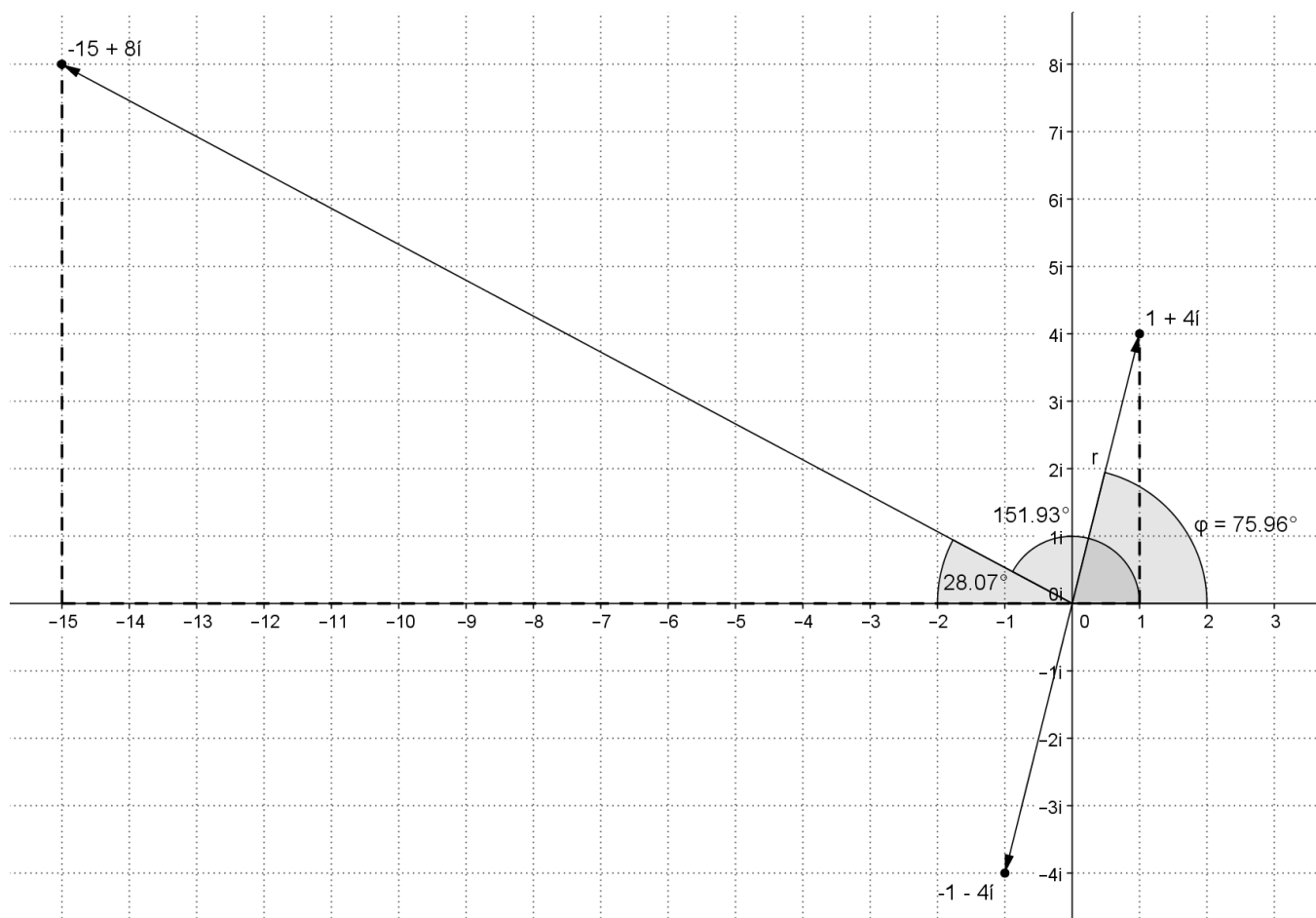
$$\underline{\underline{\sqrt{-15+8i} = 1+4i}}$$

Je še ena rešitev, saj lahko argumentu dodamo večkratnik 360° ,
zato lahko rešitvi dodamo polovico, torej 180° .

$$\varphi_1 = \varphi + 180^\circ \Rightarrow \underline{\varphi_1 = 255,964^\circ}$$

$$\sqrt{-15+8i} = a+bi \Rightarrow \underline{a = r \cdot \cos \varphi_1 = -1} \text{ in } \underline{b = r \cdot \sin \varphi_1 = -4}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{-15+8i} = -1-4i}}$$



Prostor za dodatne izračune