

Preizkus znanja v 2a iz kompleksnih števil, 3. 2. 2012 (vse naloge so enakovredne - 8 točk)

1. Določite kompleksno število z , za katero je $\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z + 1} = \frac{1}{5}$ in $\frac{\operatorname{Re} z + 2}{\operatorname{Im} z} = \frac{3}{4}$.
2. V kompleksni ravnini narišite množico $\{z \in \mathbb{C}; |z + 3 - 3i| < 4 \wedge (\operatorname{Re} z \leq -4 \vee \operatorname{Im} z > 4)\}$.
3. Izračunajte $2(1-i)^{-1} + \frac{1-13i}{3-5i} + |2-i|^4 - 3i^{95} - (\overline{3+7i})(2+5i)$.
4. Rešite enačbo $\bar{z} + i(z-1) = 6 - |z|$.
5. Razstavite v množici kompleksnih števil $x^3 - 3x^2 + 5x + 9$.
6. Rešite kvadratno enačbo $x^2 + x + 1 - i = 0$.

REŠITVE SO NA NASLEDNJIH STRANEH.

REŠITVE:

1. Zaradi boljše preglednosti bomo $\operatorname{Re} z$ in $\operatorname{Im} z$ zamenjali z x in y .

$$\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z + 1} = \frac{1}{5} \quad \text{in} \quad \frac{\operatorname{Re} z + 2}{\operatorname{Im} z} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{dobimo sistem enačb z dvema neznankama}} \frac{x}{y+1} = \frac{1}{5} \quad \text{in} \quad \frac{x+2}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = y+1 \text{ in } 4x+8 = 3y. \quad \text{Rešimo ga na zamenjalni način} \quad y = 5x-1$$

$$\text{vstavimo v drugo enačbo} \quad 4x+8 = 3(5x-1) \Rightarrow 4x+8 = 15x-3 \Rightarrow$$

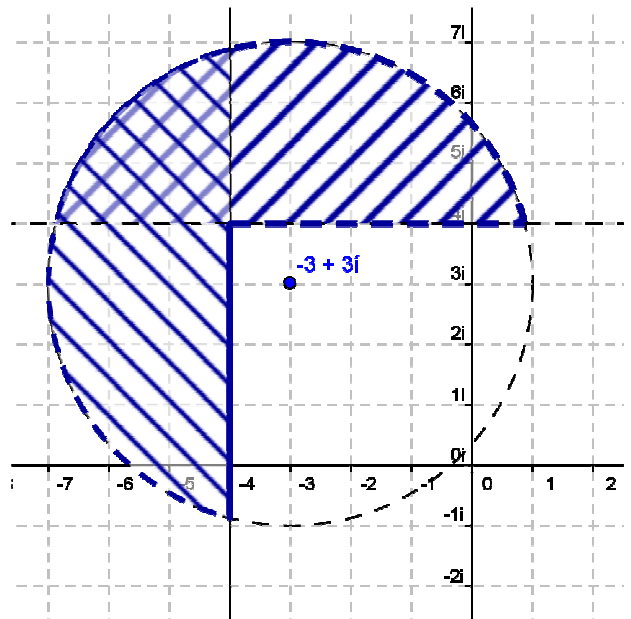
$$\Rightarrow 11x = 11 \Rightarrow x = 1 \quad y = 5 \cdot 1 - 1 = 4 \quad \underline{\underline{z = 1 + 4i}}$$

$$2. \{z \in \mathbb{C}; |z + 3 - 3i| < 4 \wedge (\operatorname{Re} z \leq -4 \vee \operatorname{Im} z > 4)\}$$

Prvi pogoj $|z + 3 - 3i| < 4$ pomeni črtkano krožnico s središčem v točki $-3 + 3i$ in

polmerom 4. Nato potegnemo dve premici, navpična je polna, vodoravna je črtkana.

Površina krožnice nad vodoravno in levo od navpične je rešitev = modro šrafirana.



$$\begin{aligned} 3. & 2(1-i)^{-1} + \frac{1-13i}{3-5i} + |2-i|^4 - 3i^{95} - (\overline{3+7i})(2+5i) = \\ &= \frac{2}{1-i} + \frac{(1-13i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)} + (\sqrt{4+1})^4 - 3i^{92+3} - (3-7i)(2+5i) = \\ &= \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{3-39i+5i+65}{9+25} + (\sqrt{5})^4 - 3i^3 - (6-14i+15i+35) = \\ &= \frac{2(1+i)}{1+1} + \frac{68-34i}{34} + 25+3i-41-i = 1+i+2-i-16+2i = \underline{\underline{-13+2i}} \end{aligned}$$

4. V enačbi $\bar{z} + i(z-1) = 6 - |z|$ bomo z zamenjali z $a + bi$.

$$a - bi + ai - b - i = 6 - \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow (a-b) + (a-b-1)i = 6 - \sqrt{a^2 + b^2} + 0 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a-b = 6 - \sqrt{a^2 + b^2}} \text{ in } \underline{a-b-1 = 0} \Rightarrow a-b = 1 \text{ in } a = b+1 \text{ vstavimo v prvo enačbo}$$

$$1 = 6 - \sqrt{(b+1)^2 + b^2} \Rightarrow \sqrt{(b+1)^2 + b^2} = 5 \Rightarrow b^2 + 2b + 1 + b^2 = 25 \Rightarrow 2b^2 + 2b - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 + b - 12 = 0 \Rightarrow (b+4)(b-3) = 0 \Rightarrow b_1 = -4 \text{ in } a_1 = -4+1 = -3 \quad b_2 = 3 \text{ in } a_2 = 4$$

$$\underline{\underline{z_1 = -3 - 4i}} \text{ in } \underline{\underline{z_2 = 4 + 3i}}$$

5. Da bi razstavili izraz $x^3 - 3x^2 + 5x + 9$, najprej ugibamo, pri kateri vrednosti x ima vrednost 0. Hitro vidimo, da je taka vrednost $-1_{-1-3-5+9=0}$. Zato bo izraz deljiv z dvočlenikom $x+1$.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 + 5x + 9) : (x+1) = x^2 - 4x + 9 \\ \underline{\pm x^3 \pm x^2} \\ -4x^2 + 5x \\ \underline{\mp 4x^2 \mp 4x} \\ 9x + 9 \\ \underline{\pm 9x \pm 9} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Sedaj razstavimo še } x^2 - 4x + 9, \\ \text{tako da rešimo ustrezno enačbo.} \\ x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 36}}{2} = \frac{4 \pm 2i\sqrt{5}}{2} = \\ = 2 \pm i\sqrt{5} \end{array}$$

$$\underline{\underline{x^3 - 3x^2 + 5x + 9 = (x+1)(x-2-i\sqrt{5})(x-2+i\sqrt{5})}}$$

6. Kvadratno enačbo $x^2 + x + (1-i) = 0$ rešujemo po obrazcu.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 + 4i}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 + 4i}}{2}$$

Sedaj je potrebno rešiti koren $\sqrt{-3 + 4i}$.

Lahko bi zapisali $\sqrt{-3 + 4i} = \sqrt{1 + 4i - 4} = \sqrt{(1+2i)^2} = 1+2i$ in takoj rešili koren.

$$\sqrt{-3 + 4i} = a + bi \Rightarrow -3 + 4i = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow a^2 - b^2 = -3 \text{ in } 2ab = 4 \Rightarrow$$

$$a = \frac{2}{b} \xrightarrow{\text{vstavimo v prvo enačbo}} \frac{4}{b^2} - b^2 = -3 \Big/ \cdot b^2 \Rightarrow 4 - b^4 = -3b^2 \Rightarrow b^4 - 3b^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b^2 - 4)(b^2 + 1) = 0 \Rightarrow b^2 = -1 \underset{\substack{b \text{ mora biti} \\ \text{realno število}}}{\text{ne more biti}} \text{ in } b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow a = \pm \frac{2}{2} = \pm 1$$

$$\sqrt{-3 + 4i} = \pm (1 + 2i) \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm (1 + 2i)}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1+1+2i}{2} = \underline{\underline{i}} \text{ in } x_2 = \frac{-1-1-2i}{2} = \underline{\underline{-1-i}}$$

Lahko pa bi rešitev i uganili ($i^2 + i + (1-i) = 0$) in nato izraz $x^2 + x + (1-i)$ delili z $x-i$.

$$\begin{array}{r} (x^2 + x + 1 - i) : (x - i) = x + (1 + i) \\ \underline{\pm x^2 \mp ix} \\ (1 + i)x + (1 - i) \\ \underline{\pm (1 + i)x \pm (-i + 1)} \\ 0 \end{array}$$

Izraz lahko razstavimo po pravilu o deljenju:

$$x^2 + x + 1 - i = (x - i)(x + (1 + i))$$

Druga rešitev je torej $x + (1 + i) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_2 = -1 - i$$