

2a, 16.12.11

Preizkus znanja: kvadratna funkcija, kvadratna enačba, kvadratna neenačba
Vsaka naloga je vredna 8 točk.

1. *Krajšaj ulomek* $\frac{3x^2 + 2x - 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}}{6x^2 + 7x + 2}$

Najhitreje bi rešili nalogo z razstavljanjem: $\frac{3x^2 + 2x - 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}}{6x^2 + 7x + 2} =$

$$= \frac{x(3x+2) - \sqrt{2}(3x+2)}{6x^2 + 4x + 3x + 2} \underset{\text{Vietovo pravilo}}{=} \frac{(3x+2)(x-\sqrt{2})}{2x(3x+2) + (3x+2)} = \frac{x-\sqrt{2}}{2x+1}$$

Lahko pa bi poiskali ničle števca in imenovalca in nato razstavili $a(x-x_1)(x-x_2)$.

Števec $3x^2 + 2x - 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} = 3x^2 + (2 - 3\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$

$$x_{1,2} = \frac{-2 + 3\sqrt{2} \pm \sqrt{4 - 12\sqrt{2} + 18 + 24\sqrt{2}}}{6} = \frac{-2 + 3\sqrt{2} \pm \sqrt{4 + 12\sqrt{2} + 18}}{6} =$$

$$= \frac{-2 + 3\sqrt{2} \pm \sqrt{(2 + 3\sqrt{2})^2}}{6} = \frac{-2 + 3\sqrt{2} \pm (2 + 3\sqrt{2})}{6} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} \text{ in } x_2 = -\frac{2}{3}$$

Podobno imenovalac: $x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{-7 \pm 1}{12} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \text{ in } x_2 = -\frac{2}{3}$

$$\frac{3x^2 + 2x - 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}}{6x^2 + 7x + 2} = \frac{3(x-\sqrt{2})(x+\frac{2}{3})}{6(x+\frac{1}{2})(x+\frac{2}{3})} = \frac{x-\sqrt{2}}{2(x+\frac{1}{2})} = \frac{x-\sqrt{2}}{2x+1}$$

2. *Narišite množico točk (x, y) , ki jo določata pogoja*

$$1 - 2x \leq y \leq x^2 - 2x - 3$$

Rešitev: Narišemo premico

$y = -2x + 1$ in označimo vse točke

nad njo $////$. Narišemo parabolo

$y = x^2 - 2x - 3$ in vse točke pod njo $////$.

Presek _{karirasto} obeh množic je rešitev.

Podatki za parabolo so:

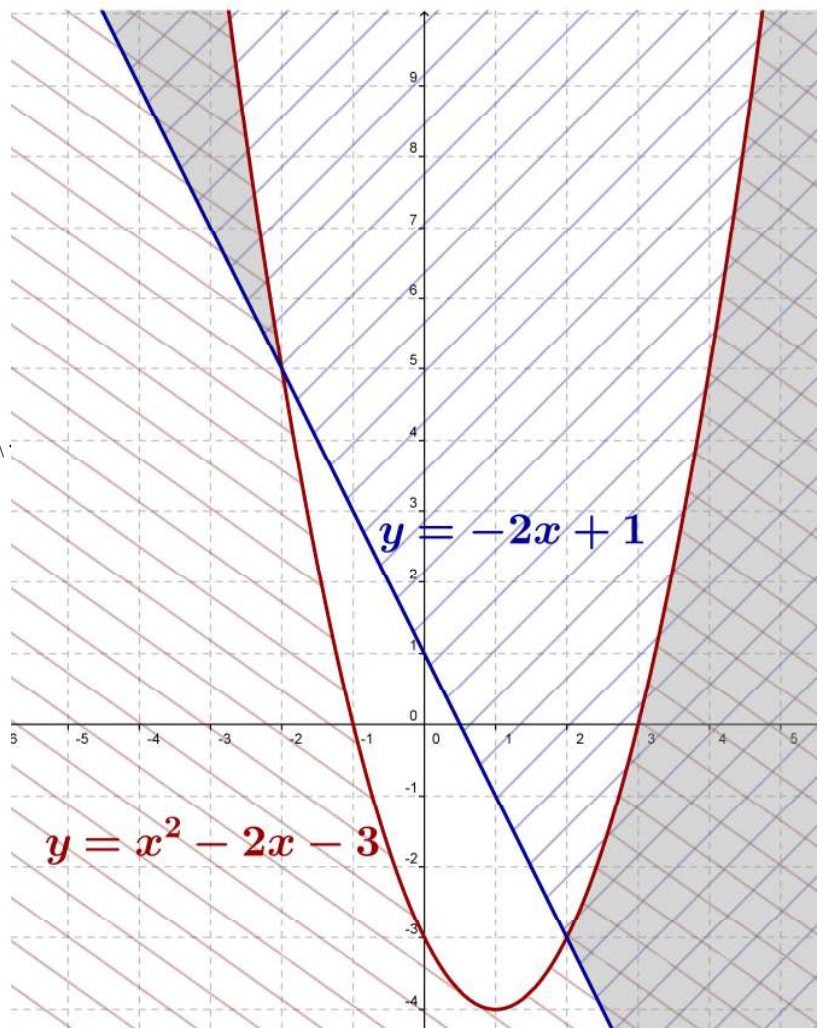
$$\text{Z.V. } y(0) = -3$$

$$\text{teme } x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 =$$

$$= (x-1)^2 - 4 \Rightarrow T(1, -4)$$

$$\text{ničli } x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$$



3. Poiščite kvadratno funkcijo, ki ima začetno vrednost -3 in gre skozi točki $A(-2, 5)$ in $B(2, -3)$.

Rešitev: Funkcijo zapišemo v splošni obliki s koeficientom $c = -3$ in vstavimo x in y obeh točk v njeno enačbo. Nato rešujemo dobljeni sistem enačb z neznankama a in b .

$$y = ax^2 + bx - 3 \xrightarrow{\text{vstavimo točki}} \begin{cases} 5 = 4a - 2b - 3 \Rightarrow 4a - 2b = 8 \\ -3 = 4a + 2b - 3 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{seštejemo}} \begin{cases} 8a = 8 \Rightarrow a = 1 \\ 2b = -4a = -4 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

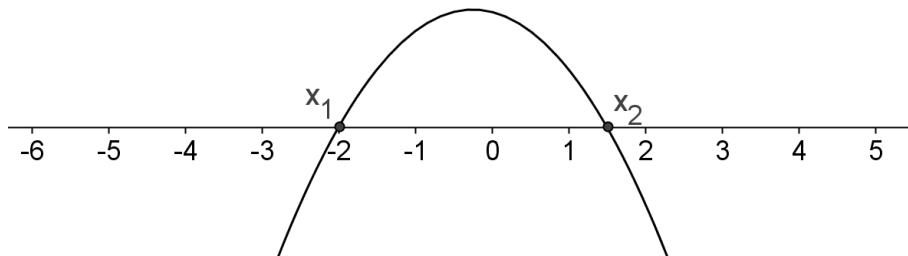
$$y = x^2 - 2x - 3$$

Enak graf kvadratne funkcije je pri prejšnji nalogi.

4. Zapišite definicijsko območje funkcije $\sqrt{6 - x - 2x^2}$

Kvadratni koren je definiran le za nenegativna realna števila, torej je funkcija definirana le, kjer je kvadratna funkcija $f(x) = -2x^2 - x + 6$ nenegativna. Za to kvadratno neenačbo moramo najprej rešiti enačbo $-2x^2 - x + 6 = 0$. Lahko rešujemo po Vietovem pravilu $-2x^2 - 4x + 3x + 6 = -2x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(-2x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ in $x_2 = \frac{3}{2}$

Ker je funkcija odprta navzdol, je nenegativna med obema ničloma: $x \in \left[-2, \frac{3}{2}\right]$ to je tudi definicijsko območje korena



5. Za kateri n je premica $y = 2x + n$ tangenta parabole $y = x^2 - 2x - 3$?

Poiščite dotikališče.

Rešitev: Premico in parabolo sekamo in zahtevamo eno samo rešitev za x oziroma y .

$$2x + n = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x - (n + 3) = 0$$

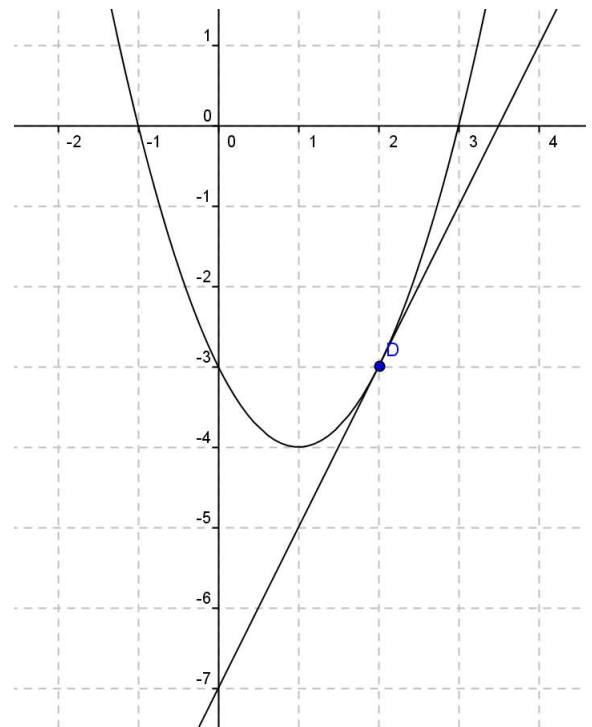
da bo le ena rešitev mora biti $D=0$ $\rightarrow D = 16 + 4(n + 3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n + 3 = -4 \Rightarrow \underline{\underline{n = -7}}$$

$$\text{Dotikališče: } x^2 - 4x - (-7 + 3) = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 2 \text{ in } y = 2 \cdot 2 - 7 = -3$$

Dotikališče je $D(2, -3)$. (Ob strani je skica.)



6. Dana je množica kvadratnih funkcij $f(x) = x^2 + (1-m)x + m + 3$. Zapišite in narišite tiste funkcije iz te množice, ki imajo zalogo vrednosti $[1, \infty)$ (to je podatek o temenu!)

Rešitev: Iz zaloge vrednosti razberemo ordinato temena, $q = 1$. Iz obrazca za ordinato temena

$$\text{izračunamo } m: q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(1-m)^2 - 4(m+3)}{4} = 1 \Rightarrow 1 - 2m + m^2 - 4m - 12 = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m - 7 = 0 \Rightarrow (m-7)(m+1) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{m_1 = 7 \text{ in } m_2 = -1}}$$

Dobili smo dve funkciji $f_1(x) = x^2 - 6x + 10$ in $f_2(x) = x^2 + 2x + 2$.

Podatki za oba grafa:

Iz zaloge vrednosti razberemo, da nobena od funkcij nima ničel, obe sta v celoti nad x -osjo, zato ničel ne bomo iskali. Funkciji bomo le pretvorili v temensko obliko in ju narisali.

$$f_1(x) = x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1 \quad T_1(3, 1)$$

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1 \quad T_2(-1, 1)$$

