

2a, 6.12.11

Ponovni preizkus znanja: potenčna in korenska funkcija, inverzna funkcija, premiki, raztegi, zrcaljenja in absolutna vrednost funkcij, koreni, potence z racionalnim eksponentom in iracionalne enačbe

Vsaka naloga je vredna 8 točk.

1. Dana je funkcija $f(x) = x^{-2}$. Narišite graf funkcije $g: x \mapsto f(|x| - 1) - 2$.

Rešitev: Originalno funkcijo x^{-2} transformiramo v smeri x -osi, najprej premik za 1 na desno, nato pa izvedemo zaradi absolutne vrednosti zrcaljenje desne strani grafa čez ordinatno os. V smeri y -osi pa graf premaknemo za 2 navzdol.

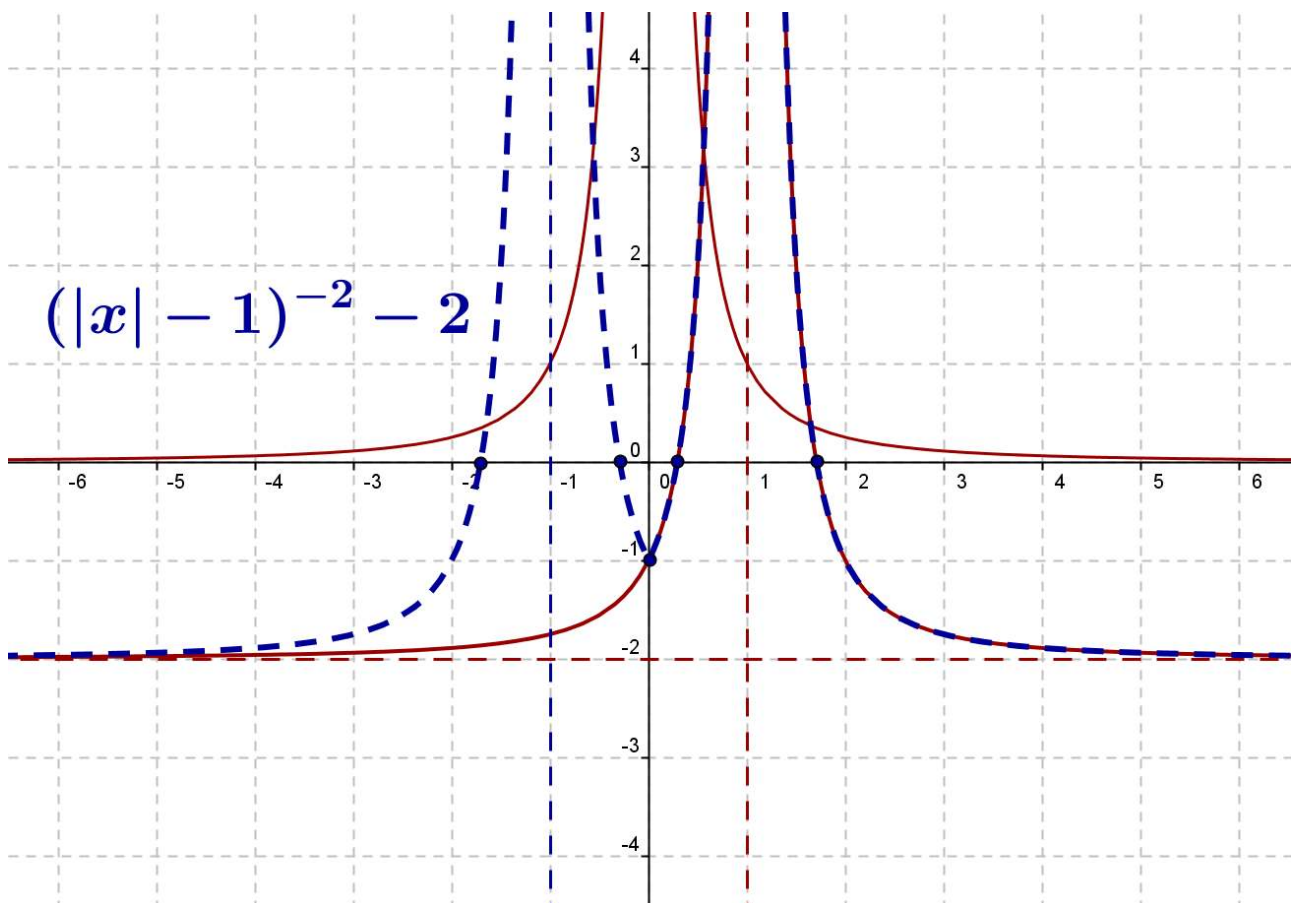
Vmesni grafi so rdeči, končni graf je modro črtkan.

$$f(x) = x^{-2} \xrightarrow[P_{y-2}]{P_{x+1}} f(x-1) - 2 = (x-1)^{-2} - 2 \xrightarrow{A_x} f(|x|-1) - 2 = (|x|-1)^{-2} - 2$$

$$\text{Začetna vrednost: } (|0|-1)^{-2} - 2 = 1 - 2 = \underline{-1}$$

$$\text{Ničla: } (|x|-1)^{-2} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{(|x|-1)^2} = 2 \Rightarrow (|x|-1)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |x|-1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_{1,2,3,4} \approx \pm(1 \pm 0,7) \quad \underline{x_1 \approx -1,7 \quad x_2 \approx -0,3 \quad x_3 \approx 0,3 \quad x_4 \approx 1,7}$$

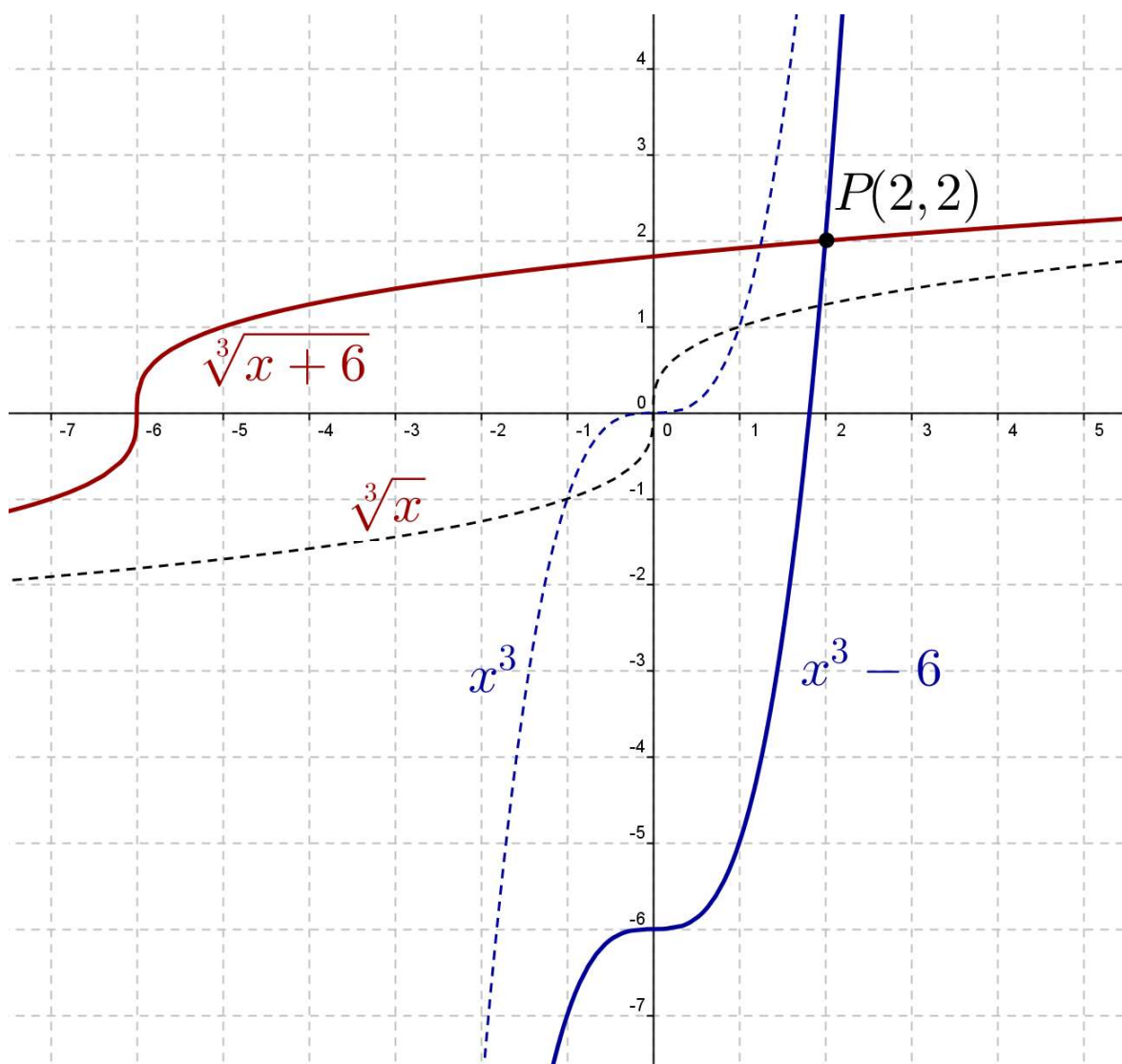


2. K funkciji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^3 - 6$ zapišite predpis za inverzno funkcijo f^{-1} in v istem koordinatnem sistemu narišite grafa obeh funkcij. Izračunajte presečišča njunih grafov.

Rešitev: $f(x) = y = x^3 - 6 \xrightarrow{f^{-1}} x = y^3 - 6 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+6} \quad \underline{\underline{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+6}}}$

Risanje grafov: $f(x)$ narišemo tako, da potenčno funkcijo x^3 premaknemo za 6 navzdol $f(x)$ pa tako, da korensko funkcijo $\sqrt[3]{x}$ premaknemo za 6 na levo.

Presečišče obeh grafov računamo tako, da izenačimo oba y : $x^3 - 6 = \sqrt[3]{x+6}^3 \Rightarrow \Rightarrow x^9 - 18x^6 + 108x^3 - 216 = x + 6 \Rightarrow x^9 - 18x^6 + 108x^3 - x - 222 = 0$. Dobili smo enačbo devete stopnje, ki je ni več možno izračunati algebrsko (po obrazcu). Zato rešitev preberemo iz grafa ($x = 2$) in naredimo preizkus: $L = 2^3 - 6 = 2 = D = \sqrt[3]{2+6} = 2$



3. Rešite iracionalno enačbo: $\sqrt[3]{x+3+\sqrt{x+1}} = 2$

Rešitev: $\sqrt[3]{x+3+\sqrt{x+1}} = 2 \Rightarrow x+3+\sqrt{x+1} = 8 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 5-x \Rightarrow$
 $\Rightarrow x+1 = 25-10x+x^2 \Rightarrow x^2-11x+24=0 \Rightarrow (x-8)(x-3)=0$

Preizkus: $x=8 \Rightarrow L = \sqrt[3]{8+3+\sqrt{8+1}} = \sqrt[3]{11+3} \neq 2 = D$

$x=3 \Rightarrow L = \sqrt[3]{3+3+\sqrt{3+1}} = \sqrt[3]{6+2} = 2 = D$

4. Racionalizirajte imenovalca in seštejte: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{6-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

Rešitev: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{6-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} - \frac{(6-2\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} =$
 $= 6+2\sqrt{6} - \frac{6\sqrt{6}-6\sqrt{2}-2\sqrt{18}+2\sqrt{6}}{4} = 6+2\sqrt{6} - \frac{8\sqrt{6}-12\sqrt{2}}{4} =$
 $= 6+2\sqrt{6}-2\sqrt{6}+3\sqrt{2} = \underline{\underline{6+3\sqrt{2}}}$

5. Poenostavite: $\sqrt[3]{x^{-4}y^2} \sqrt[5]{x^{16}y^{-2}} : \sqrt[5]{\frac{xy^{-2}}{\sqrt[3]{y\sqrt{x^{-1}}}}}$

Rešitev: $\sqrt[3]{x^{-4}y^2} \sqrt[5]{x^{16}y^{-2}} : \sqrt[5]{\frac{xy^{-2}}{\sqrt[3]{y\sqrt{x^{-1}}}}} = \sqrt[15]{x^{-20}y^{10} \cdot x^{16}y^{-2}} : \sqrt[5]{\frac{xy^{-2}}{\sqrt[6]{y^2 \cdot x^{-1}}}} =$
 $= \sqrt[15]{x^{-4}y^8} : \sqrt[30]{\frac{x^6y^{-12}}{y^2x^{-1}}} = \sqrt[30]{x^{-8}y^{16}} : \sqrt[30]{x^7y^{-14}} = \sqrt[30]{x^{-8-7}y^{16-(-14)}} = \sqrt[30]{x^{-15}y^{30}} = \frac{y}{\sqrt{x}}$

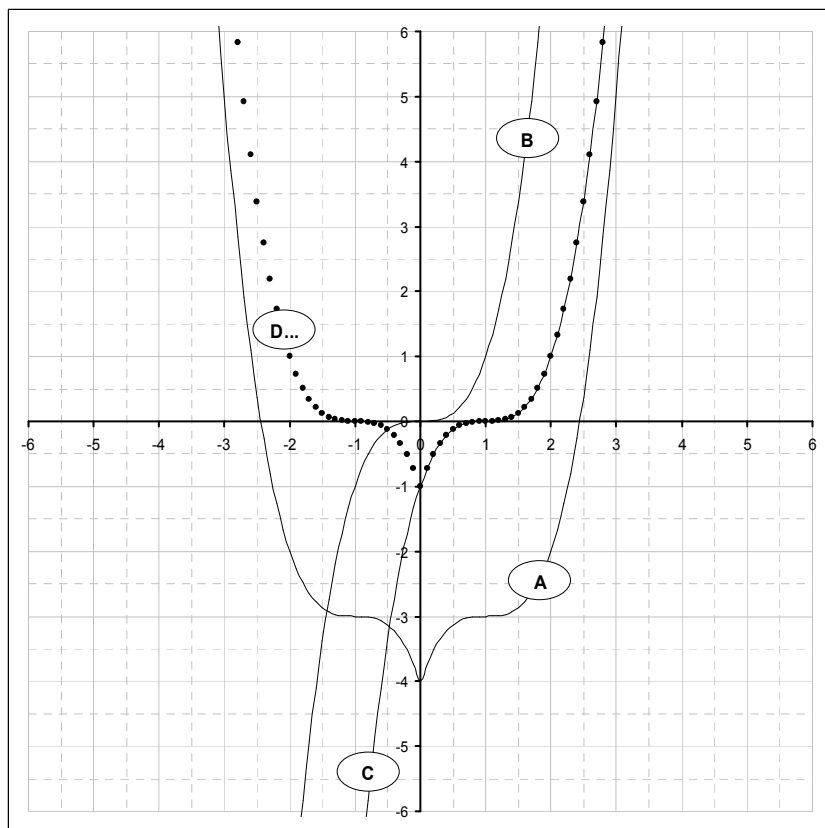
Izračunajte: $\sqrt{625^{\frac{3}{4}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} + 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$

Rešitev: $\sqrt{625^{\frac{3}{4}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} + 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\left(\sqrt[4]{625}\right)^3 - (2)^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt{125-4} + 2 = \underline{\underline{13}}$

6. Rešite nalogo s funkcijami. Izpolnite prazna mesta.

Računajte na dve decimalni mesti natančno.

Rešitve so vnesene v obrazec z rdečo barvo.



$$\boxed{B} = x^3$$

$$P_{x+1} \quad \boxed{C} = (x-1)^3$$

$$A_x \quad \boxed{D} = (|x|-1)^3$$

$$P_{y-3} \quad \boxed{A} = (|x|-1)^3 - 3$$

1. Koliko je zaloga vrednosti funkcije $D(x)$?
2. Koliko je začetna vrednost funkcije $C(x)$?
3. Reši enačbo $A(x) = 5$
4. Izračunaj ničle funkcije $A(x)$.

1. $Z_D = [-1, \infty)$
2. $C(0) = -1$
3. $(|x|-1)^3 - 3 = 5 \Rightarrow (|x|-1)^3 = 8/\sqrt[3]{} \Rightarrow |x|-1 = 2 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1 = 3 \text{ in } x_2 = -3$
4. $(|x|-1)^3 - 3 = 0 \Rightarrow (|x|-1)^3 = 3/\sqrt[3]{} \Rightarrow |x|-1 = \sqrt[3]{3} \Rightarrow |x| = 1 + \sqrt[3]{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt[3]{3} \approx 2,44 \text{ in } x_2 = -1 - \sqrt[3]{3} = -2,44$