

2a, 8.11.11

Preizkus znanja: potenčna in korenska funkcija, inverzna funkcija, premiki, raztegi, zrcaljenja in absolutna vrednost funkcije, koreni, potence z racionalnimi eksponenti in iracionalne enačbe Vsaka naloga je vredna 8 točk.

1. Dana je funkcija $f(x) = x^{-1}$. Narišite graf funkcije $g: x \mapsto |f(x-2) - 1|$.

Rešitev: Graf funkcije $g(x)$ narišemo s premikom funkcije $f(x)$ za 2 na desno in za 1 navzdol, nato pa z zrcaljenjem negativnega dela funkcije čez x os upoštevamo še absolutno vrednost.

Zapis funkcije je $g(x) = |(x-2)^{-1} - 1|$

Začetna vrednost je $g(0) = |(0-2)^{-1} - 1| = |-\frac{1}{2} - 1| = \frac{3}{2}$

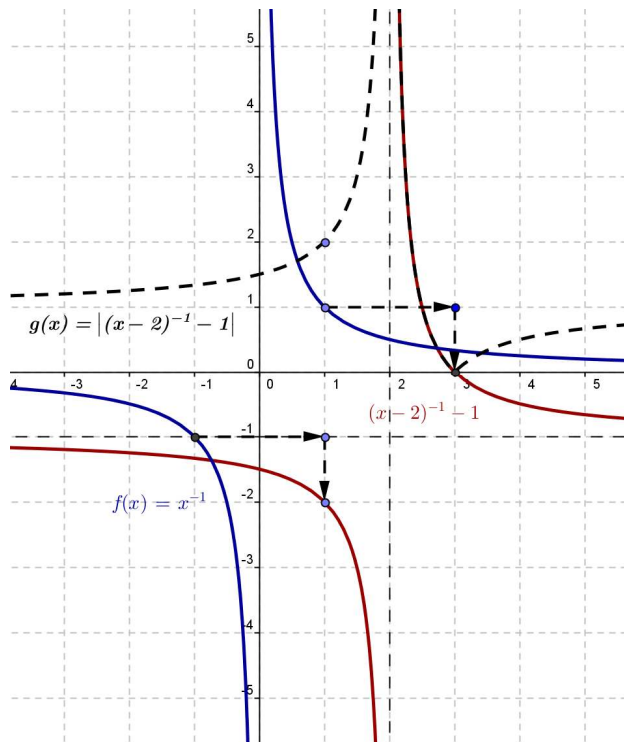
Ničla je rešitev enačbe $|(x-2)^{-1} - 1| = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-2)^{-1} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2 = 1 \Rightarrow \underline{x = 3}$$

Značilni točki funkcije x^{-1} se ustrezno premakneta:

$$\begin{aligned} (-1, -1), (1, 1) &\xrightarrow{P_{x+2} \ P_{y-1}} (1_{-1+2}, -2_{-1-1}), (-1_{1-2}, 0_{1-1}) \Rightarrow \\ &\xrightarrow{A_y} (\underline{1, 2_{|-2|}}), (\underline{-1, 0}) \end{aligned}$$



2. K funkciji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{4}x^3$ zapišite predpis za inverzno funkcijo f^{-1} in v istem koordinatnem sistemu narišite grafa obeh funkcij. Izračunajte presečišča njihovih grafov.

Rešitev: $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ je enak zapisu $y = \frac{1}{4}x^3$. V zapisu

zamenjamo x in y $x = \frac{1}{4}y^3$ in izračunamo (izrazimo) y

$$\frac{1}{4}y^3 = x \Rightarrow y^3 = 4x \Rightarrow y = \sqrt[3]{4x} \text{ torej } \underline{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x}}$$

(Z izračunom y nismo imeli težav dobili smo le eno rešitev, ker je bila osnovna funkcija $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ injektivna.)

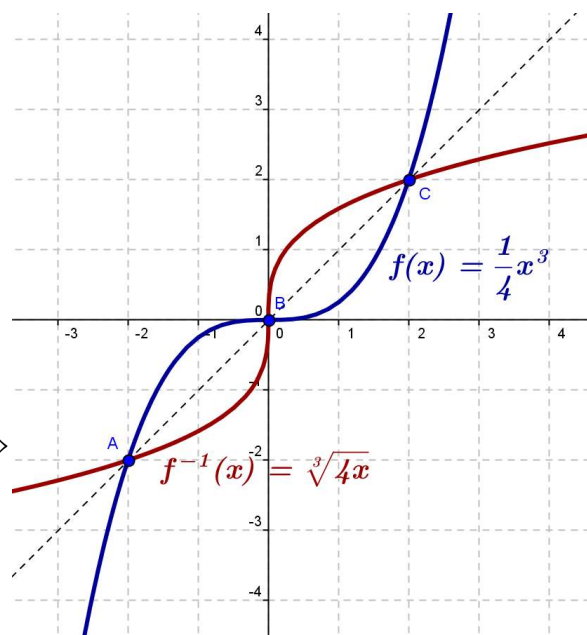
Presečišče obeh grafov $y = \frac{1}{4}x^3$ in $y = \sqrt[3]{4x}$ izračunamo tako, da izenačimo oba y in izračunamo ustrezen x .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^3 &= \sqrt[3]{4x}/4 \Rightarrow x^3 = 4\sqrt[3]{4x}/3 \Rightarrow x^6 = 4^3 \cdot 4x \Rightarrow x^9 - 4^4x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(x^8 - 4^4) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \text{ in } x^8 = 4^4 \Rightarrow x^8 = 2^8 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[8]{2^8} = \pm 2 \Rightarrow \underline{x_2 = 2} \text{ in } \underline{x_3 = -2}.$$

Ustrezni y pa so $y_1 = \frac{1}{4}0^3 = 0$, $y_2 = \frac{1}{4}2^3 = 2$ in $y_3 = \frac{1}{4}(-2)^3 = -2$.

Grafa se sekata v treh točkah $A(0, 0)$, $B(2, 2)$ in $C(-2, -2)$.



3. Rešite iracionalno enačbo: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3$

Rešitev: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow x+2 + \sqrt{x-1} = 9 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 7-x \Rightarrow$
 $\Rightarrow x-1 = 49 - 14x + x^2 \Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-10) = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \text{ in } x_2 = 10.$

Preizkus: $L_{x_1=5} = \sqrt{5+2} + \sqrt{4} = \sqrt{9} = 3 = D_{OK}$ in $L_{x_1=10} = \sqrt{10+2} + \sqrt{9} = \sqrt{15} \neq D_{ni OK}$

Rešitev je le ena $x = 5$.

4. Racionalizirajte imenovalca in seštejte: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+3} - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-4}$

Rešitev: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+3} - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-4} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6}-3)}{(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}-3)} - \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{3}+4)}{(2\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}+4)} =$
 $= \frac{2\sqrt{18}-6\sqrt{3}}{6-9} - \frac{2\sqrt{15}+4\sqrt{5}}{12-16} = \frac{6\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{-3} + \frac{2\sqrt{15}+4\sqrt{5}}{4} = \underline{\underline{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{15}}}$

5. Poenostavite: $\sqrt[6]{x^5 y^{-2}} \sqrt[3]{\frac{27x^{-1}y^{-2}}{x^2 y^{-5}}} : \sqrt[3]{y \sqrt{\frac{xy^3}{9}}}$

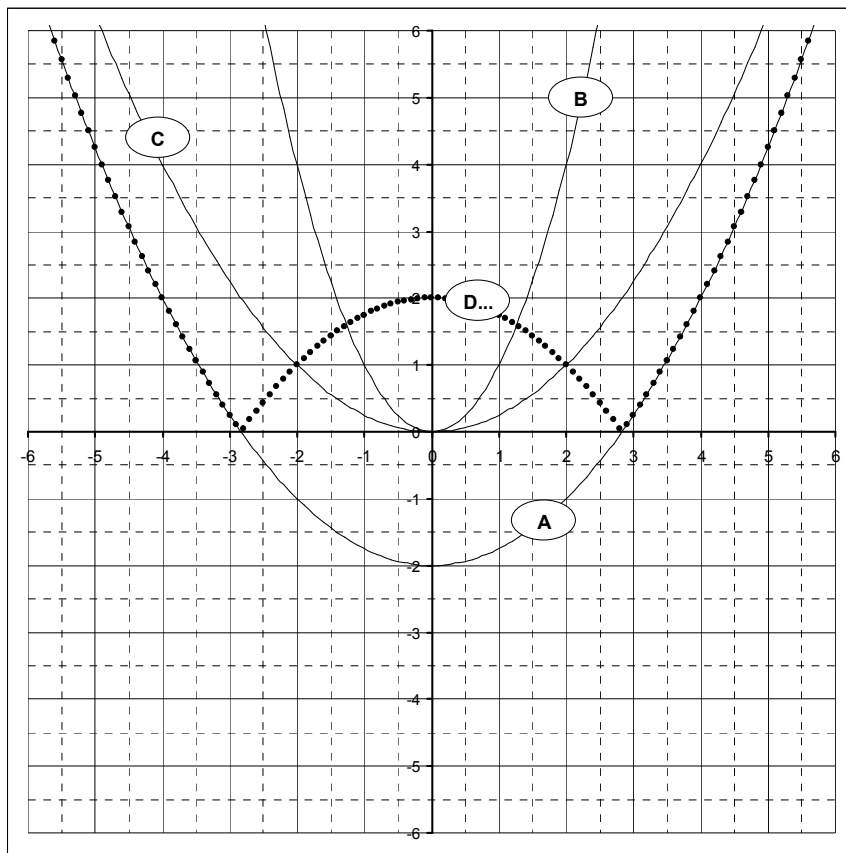
Izračunajte: $\sqrt{4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} - 5 \cdot 8^{\frac{4}{3}} + 5^{\frac{4}{5}} \cdot 5^{\frac{6}{5}}}$

Rešitev: $\sqrt[6]{x^5 y^{-2}} \sqrt[3]{\frac{27x^{-1}y^{-2}}{x^2 y^{-5}}} : \sqrt[3]{y \sqrt{\frac{xy^3}{9}}} = \sqrt[6]{x^{5 \cdot 3} y^{-2 \cdot 3}} \cdot \sqrt[3]{3^3 x^{-1 \cdot 3} y^{-2 \cdot 3} \cdot x^{-1 \cdot 2} y^{-2 \cdot 5}} : \sqrt[3]{y^2 \cdot xy^3 3^{-2}} =$
 $= \sqrt[18]{3^3 x^{15} y^{-6} x^{-3} y^3} : \sqrt[6]{3^{-2} xy^5} = \sqrt[18]{3^3 x^{12} y^{-3}} : \sqrt[6]{3^{-2} xy^5} = \sqrt[6]{3x^4 y^{-1}} : \sqrt[6]{3^{-2} xy^5} = \sqrt[6]{3^{1-(-2)} x^{4-1} y^{-1-5}} =$
 $= \sqrt[6]{3^3 x^3 y^{-6}} = \sqrt{3xy^{-2}} = \frac{\sqrt{3x}}{y}$

$\sqrt{4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} - 5 \cdot 8^{\frac{4}{3}} + 5^{\frac{4}{5}} \cdot 5^{\frac{6}{5}}} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 5 \cdot (\sqrt[3]{8})^4 + 5^{\frac{4}{5} + \frac{6}{5}}} = \sqrt{4 \cdot \frac{81}{4} - 5 \cdot 2^4 + 5^{\frac{10}{5}}} =$
 $= \sqrt{81 - 5 \cdot 16 + 5^2} = \sqrt{81 - 80 + 25} = 1 + 25 = \underline{\underline{26}}$

6. Reši nalogo s funkcijami. Izpolni prazna mesta. Računaj na dve decimalni mesti natančno.

Rešitev: rešitve so rdeče.



$$\boxed{\text{B}} = x^2$$

$$R_{2x} \quad \boxed{\text{C}} = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$P_{y-2} \quad \boxed{\text{A}} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2$$

$$A_y \quad \boxed{\text{D}} = \left| \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \right|$$

1. Koliko je zaloga vrednosti funkcije $A(x)$?
2. Koliko je začetna vrednost funkcije $D(x)$?
3. Reši enačbo $D(x) = 2$
4. Izračunaj ničle funkcije $A(x)$.

1. Zaloga vrednosti $A(x)$ je $Z_A = [-2, \infty)$

2. Začetna vrednost $D(x)$ je $D(0) = \left| \left(\frac{0}{2}\right)^2 - 2 \right| = 2$ os preseka pri 2

3. Enačba $D(x) = 2$: $\left| \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 = 2 \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4 \rightarrow \frac{x}{2} = \pm 2 \rightarrow x = \pm 4 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 = -2 \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$

Imamo tri rešitve: $x_1 = -4$, $x_2 = 0$ in $x_3 = 4$ (presečišča grafa z vodoravno premico $y = 2$)

4. Ničle $A(x)$: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \approx \pm 2,83$ (presečišča grafa z x-osjo)