

1e, 21.12.11

Ponovitev preizkusa znanja: izjave, množice, številski sestavi, kriteriji deljivosti, razstavljanje
Vsaka naloga je vredna 4 točke.

1. Rešite naslednji nalogi:

- a) Določite vrednost izjave $A \Rightarrow B \wedge \neg C \Leftrightarrow A \vee \neg B$, če so vse tri izjave A, B in C nepravilne.
b) S pravilnostno tabelo dokažite distributivnost konjunkcije glede na disjunkcijo.

Rešitev a): Izračunamo pravilnost sestavljene izjave pri vrednostih $A = n, B = n$ in $C = n$.

Upoštevati moramo vrstni red izjav, pomagamo si z oklepaji.

$[A \Rightarrow (B \wedge \neg C)]$	$\Leftrightarrow$	$(A \vee \neg B)$
$n \wedge n \wedge p \wedge n$		$n \vee n \wedge p \wedge n$
$n \Rightarrow n$	$\Leftrightarrow$	p
p	p	p

Rešitev b): Distributivnost konjunkcije glede na disjunkcijo se glasi $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A	$\wedge$	$(B \vee C)$	$\Leftrightarrow$	$(A \wedge B)$	$\vee$	$(A \wedge C)$
n	n	$n \vee n$	p	$n \wedge n$	n	$n \wedge n$
n	n	$n \vee p$	p	$n \wedge n$	n	$n \wedge p$
n	n	$p \vee p$	p	$n \wedge p$	n	$n \wedge n$
n	n	$p \vee p$	p	$n \wedge p$	n	$n \wedge p$
p	n	$n \vee n$	p	$p \wedge n$	p	$p \wedge n$
p	p	$n \vee p$	p	$p \wedge n$	p	$p \wedge p$
p	p	$p \vee n$	p	$p \wedge p$	p	$p \wedge n$
p	p	$p \vee p$	p	$p \wedge p$	p	$p \wedge p$

2. Množica A vsebuje vse skupne delitelje števil 18 in 24, množica B pa je definirana takole:

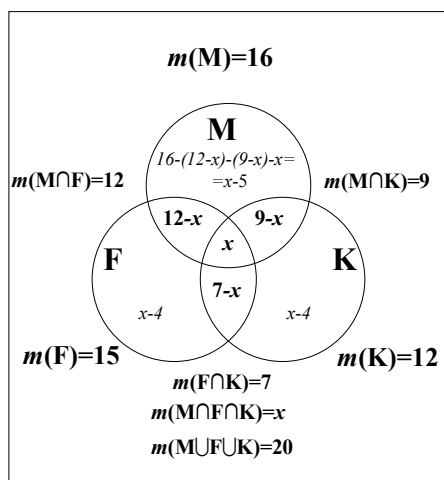
$B = \{x; x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^-, x = 2k + 3 \wedge k > -3\}$. Naštejte elemente obeh množic in določite množice: $A \cup B, A \times B$ in $\mathcal{P}(A - B)$.

Rešitev: $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$ šest deliteljev $\rightarrow \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
 $24 = 3 \cdot 8 = 2^3 \cdot 3$ osem deliteljev $\rightarrow \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \Rightarrow \underline{\underline{A = \{1, 2, 3, 6\}}}$

$$B = \{x; x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^-, x = 2k + 3 \wedge k > -3\} \Rightarrow B_k = \{-2, -1\} \Rightarrow B = \underline{\underline{\{-1, 1\}}}$$

$$\underline{\underline{A \cup B = \{-1, 1, 2, 3, 6\}}}, \quad \underline{\underline{A \times B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (6, 1), (1, -1), (2, -1), (3, -1), (6, -1)\}}}} \quad \text{in}$$

$$\underline{\underline{A - B = \{2, 3, 6\} \Rightarrow \mathcal{P}(A - B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{2, 3, 6\}\}}}$$



3. Izmed 20 dijakov se jih je matematičnega tekmovanja udeležilo 16, tekmovanja iz fizike 15 in tekmovanja iz kemije 12. Vsak od teh dijakov se je udeležil vsaj enega tekmovanja, nekateri pa so sodelovali na več tekmovanjih: na matematičnem in fizikalnem tekmovanju 12, na fizikalnem in kemijskem 7, na matematičnem in kemijskem pa 9 dijakov. Koliko dijakov se je udeležilo vseh treh tekmovanj? Ali je kateri izmed dijakov tekmoval le na matematičnem tekmovanju?

Rešitev: $m(M \cup F \cup K) = m(M) + m(F) + m(K) - m(M \cap F) - m(F \cap K) - m(M \cap K) + m(M \cap F \cap K)$
 $20 = 16 + 15 + 12 - 12 - 7 - 9 + x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$ Vseh treh tekmovanj se je udeležilo 5 dijakov.

Le matematično tekmovanje $m(M) - m(M \cap F) - m(M \cap K) + m(M \cap F \cap K) = 16 - 12 - 9 + 5 = 0$

Noben dijak se ni udeležil samo matematičnega tekmovanja.

4. Napišite rezultat računa v številskem sestavu z osnovo 5.

$$222_{(3)} + 333_{(4)}$$

Rešitev: Obe števili pretvorimo najprej v desetiški sistem, nato ju seštejemo in pretvorimo

v sistem z osnovo 5.

$$222_{(3)} = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = \underline{26}$$

$$333_{(4)} = 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 = \underline{63}$$

$\Rightarrow$ Vsota je 89

89:5	ost
17	4
3	2
0	3

$$\underline{\underline{222_{(3)} + 333_{(4)} = 324_{(5)}}}$$

5. V številu a1aa1aa1a določite števko a, da bo število deljivo istočasno s 6 in z 11.

Rešitev: Število je deljivo s 6, če je deljivo z 2 in s 3.

deljivost z 2 $\Rightarrow a = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ deljivost s 3 $\Rightarrow$ vsota števk je deljivo s 3 $\Rightarrow$

$a + 1 + a + a + 1 + a + a + 1 + a = 3 + 6a = 3(1 + 2a)$ vedno deljivo s 3, ker je večkratnik 3,

a je lahko katerakoli števka. Skupni odgovor: $a = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Število je deljivo z 11, če je razlika med vsoto števk na lihih mestih in vsoto števk na

sodih mestih deljiva z 11. Vsota na lihih mestih je $4a + 1$, vsota na sodih mestih pa je $2a + 2$.

Razlika je deljiva z 11: $4a + 1 - (2a + 2) = 2a - 1 = k \cdot 11 \Rightarrow 2a = 11k + 1$. Vstavljamo različne k,

ki mora biti liho število, ker je na levi sodo število. $2a = 11 + 1 \Rightarrow \underline{a = 6}$ $2a = 33 + 1 \Rightarrow a = 16$ >9, ni možno

Skupni odgovor je $a = 6$.

6. Razstavite :

a) $a^6 - b^6$

b) $x^3 + 5x^2y - 4xy^2 - 20y^3$

c) $-6x^5y^2 - 18x^4y^3 + 108x^3y^4$

Rešitve:

a) $a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = \underline{\underline{(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)(a^2 - ab + b^2)}}$

Lahko pa razstavimo po obrazcu $a^n - b^n$, vendar se precej zaplete pri razstavljanju drugega dela, če bi hoteli dobiti enak rezultat:

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) = \\ &= (a-b)(a^4(a+b) + a^2b^2(a+b) + b^4(a+b)) = (a-b)(a+b)(a^4 + a^2b^2 + b^4) = \\ &= (a-b)(a+b)((a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2) = (a-b)(a+b)((a^2 + b^2)^2 - a^2b^2) = \\ &= \underline{\underline{(a-b)(a+b)(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)}}_{\text{isto kot zgoraj}} \end{aligned}$$

b) $x^3 + 5x^2y - 4xy^2 - 20y^3 = x^2(x + 5y) - 4y^2(x + 5y) = (x + 5y)(x^2 - 4y^2) =$
 $\underline{\underline{(x + 5y)(x - 2y)(x + 2y)}}$

c) $-6x^5y^2 - 18x^4y^3 + 108x^3y^4 = -6x^3y^2(x^2 + 3xy - 18y^2) = \underline{\underline{-6x^3y^2(x + 6y)(x - 3y)}}$