

1e, 12. 12. 11

Preizkus znanja: deljivost

Vsaka naloga je vredna 4 točke.

1. Z deljenjem preverite ali velja naslednja trditev: $(x-2) \mid (x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 7x + 2)$

Rešitev:

$$\begin{array}{r} (x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 7x + 2) : (x - 2) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\ -(x^4 - 2x^3) \\ \hline -2x^3 + 7x^2 \\ -(-2x^3 + 4x^2) \\ \hline 3x^2 - 7x \\ -(3x^2 - 6x) \\ \hline -x + 2 \\ -(-x + 2) \\ \hline 0_{\text{ostane}} \Rightarrow \text{Trditev velja.} \end{array}$$

2. a) Če neko število delimo z n , dobimo kvocient 11 in ostanek 6, če ga delimo z $n + 5$, pa dobimo kvocient 6 in ostanek 11. Koliko je n in katero število smo delili?

b) Pokažite, da velja $6 \mid (49^9 - 7^{17})$.

Rešitev: a) $m : n = 11_{\text{ostane}}$ in $m : (n + 5) = 6_{11 \text{ ostane}}$ Po izreku o deljenju velja:

$$m = 11n + 6 \text{ in } m = 6(n + 5) + 11 \xrightarrow{\text{izenačimo}} 11n + 6 = 6(n + 5) + 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11n + 6 = 6n + 30 + 11 \Rightarrow 5n = 35 \Rightarrow n = 7 \text{ in } m = 11 \cdot 7 + 6 = 83$$

Delili smo število 83, in sicer s 7 in z 11.

$$\text{b) } 49^9 - 7^{17} = (7^2)^9 - 7^{17} = 7^{18} - 7^{17} = 7^{17}(7 - 1) = 7^{17} \cdot 6_{\text{število je deljivo s 6}}$$

3. a) Pokažite, da je za vsako naravno število n vrednost izraza $n^2 + 5n + 6$ sodo število.

b) Pokažite, da vsota treh zaporednih naravnih števil ne more biti praštevilo.

Rešitev: a) $n^2 + 5n + 6 = (n + 2)(n + 3)$ Izraz je enak produktu dveh zaporednih naravnih števil $n + 2$ in $n + 3$. Ker je eno od njiju gotovo sodo, je tudi produkt sodo število.

* Lahko tudi takole $\rightarrow n$ je sodo število: $n = 2k \Rightarrow (2k)^2 + 5 \cdot 2k + 6 = 4k^2 + 10k + 6 = 2(2k^2 + 5k + 3)_{\text{sodo}}$

in n je liho število: $n = 2k + 1 \Rightarrow (2k + 1)^2 + 5 \cdot (2k + 1) + 6 = 4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 + 6 = 4k^2 + 14k + 12 = 2(2k^2 + 7k + 6)_{\text{sodo}}$

b) Imamo tri zaporedna naravna števila: $n, n + 1$ in $n + 3$. Njihova vsota je

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1). \text{ Število, ki smo ga dobili, ima dva delitelja, 3 in } n + 1.$$

Vsako praštevilo ima le dva delitelja, eden od njiju je nujno 1. Število $3(n + 1)$ bi bilo praštevilo, če bi bilo število $n + 1$ lahko enako 1. To velja le za $n = 0$, ki pa ni naravno število.

4. Števili a in b dasta pri deljenju s 4 ostanek 3.

a) Kolikšen ostanek da pri deljenju s 4 število $a + b$?

b) Kolikšen ostanek da pri deljenju s 4 število $a \cdot b$?

Rešitev: Števili a in b sta oblike $4k + 3$ in sicer $a = 4k_1 + 3$ in $b = 4k_2 + 3$.

$$\begin{aligned} \text{a) } a + b &= (4k_1 + 3) + (4k_2 + 3) = 4k_1 + 4k_2 + 4 + 2 = \\ &= 4(k_1 + k_2 + 1) + 2 = 4k + 2. \end{aligned}$$

Ostanek pri deljenju s 4 je 2.

$$\begin{aligned} \text{b) } a \cdot b &= (4k_1 + 3) \cdot (4k_2 + 3) = 16 \cdot k_1 \cdot k_2 + 12 \cdot k_1 + 12 \cdot k_2 + 9 = \\ &= 16 \cdot k_1 \cdot k_2 + 12 \cdot k_1 + 12 \cdot k_2 + 8 + 1 = 4(4 \cdot k_1 \cdot k_2 + 3 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2 + 2) + 1 = \\ &= 4k + 1. \end{aligned}$$

Ostanek pri deljenju s 4 je 1.

5. Zadnja števka štirimestnega števila je 5. Če jo zberemo in prenesemo na začetek števila, je tako dobljeno število za 2007 večje od prvotnega. Katero je prvotno število?

Prvotno število je $\overline{abc5}$, novo število pa $\overline{5abc}$. Novo število je za 2007 večje $\Rightarrow \overline{abc5} + 2007 = \overline{5abc}$.

Da bomo lahko računali uporabimo zapis števila po potencah števila 10:

$$1000a + 100b + 10c + 5 + 2007 = 5000 + 100a + 10b + c \Rightarrow 900a + 90b + 9c = 2988 / : 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100a + 10b + c = 332 \Rightarrow \overline{abc} = 332. \quad \text{Prvotno število je } \underline{\underline{3325}}.$$

*Še bolje je števila zapisati drugače: Če je $\overline{abc} = x$, potem velja $\overline{abc5} = 10x + 5$ in $\overline{5abc} = 5000 + x$.

$$\text{Sedaj je račun bolj preprost: } 10x + 2007 = 5000 + x \Rightarrow 9x = 2988 \Rightarrow \underline{\underline{x = 332}}$$

6. Zapišite največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik izrazov:

a) $z^2 - 49$, $z^2 - 12z + 35$, $z^2 - 6z - 7$

b) $5x^3 - x^2y$, $25x^4 - x^2y^2$, $125x^4 - xy^3$

Rešitev a) $z^2 - 49 = (z - 7)(z + 7)$ $z^2 - 12z + 35 = (z - 7)(z + 5)$ $z^2 - 6z - 7 = (z - 7)(z + 1)$
 $\underline{\underline{D = z - 7}} \quad \underline{\underline{v = (z - 7)(z + 7)(z + 5)(z + 1)}}$

Rešitev b) $5x^3 - x^2y = x^2(5x - y)$ $25x^3 - x^2y^2 = x^2(25x^2 - y^2) = x^2(5x - y)(5x + y)$
 $125x^4 - xy^3 = x(125x^3 - y^3) = x(5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2)$
 $\underline{\underline{D = x(5 - x)}} \quad \underline{\underline{v = x^2(5x - y)(5x + y)(25x^2 + 5xy + y^2)}}$