

1a Preizkus znanja: realna števila (kvadratni koren, interval, linearne neenačbe, absolutna vrednost), koordinatni sistem (množice točk v ravnini)

6.5.11

Kriterij: 50%-zad, 62,5%-db, 75%-pdb, 87,5%-odl

Dve podnalogi (3 točke) oziroma ena naloga (6 točk) sta dodatno, zato je 50% že 15 točk.

6 točk 1) Dokažite, da $\sqrt{3}$ ni ulomek.

- Dokazujemo s protislovjem: Recimo, da je $\sqrt{3}$ **okrajšan** ulomek $\frac{m}{n}$. Potem velja

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 3 \Rightarrow m^2 = 3n^2 \Rightarrow m^2 \text{ je deljiv s } 3. \text{ Iz tega sledi, da je tudi } m \text{ deljiv s } 3,$$

kajti, če ne bi bil, bi ga lahko zapisali ali kot $m = 3k + 1 \Rightarrow m^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ m^2 ni deljiv s 3,

ali kot $m = 3k + 2 \Rightarrow m^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ m^2 spet ni deljiv s 3. * Torej lahko m zapišemo

le kot $m = 3k \Rightarrow m^2 = 9k^2$. To vstavimo v enačbo $m^2 = 3n^2$ in dobimo $9k^2 = 3n^2$. Če enačbo delimo s 3, dobimo $3k^2 = n^2$. Sedaj lahko enako ugotovimo, da je tudi n deljiv s 3. Torej ulomek $\frac{m}{n}$ ni okrajšan, saj bi ga lahko krajšali s 3. Dobili smo protislovje in zato $\sqrt{3}$ ne more biti ulomek. Dokaz je končan.

- Lahko pa razmišljamo drugače: Recimo, da je $\sqrt{3}$ **okrajšan** ulomek $\frac{m}{n}$. Potem velja

$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 3 \Rightarrow m^2 = 3n^2 \Rightarrow m^2$ se da le na en način razstaviti na praštevila. Ker je 3 praštevilo in je $m \cdot m = 3 \cdot n \cdot n$, mora m vsebovati faktor 3, m je torej deljiv s 3. Naprej nadaljujemo tako kot zgoraj od oznake * dalje.

3 točke 2) Razstavite $5x^7 - 145x^5 + 270x^3$.

$$\begin{aligned} & 5x^7 - 145x^5 + 270x^3 \Rightarrow 5x^3(x^4 - 29x^2 + 54) \Rightarrow 5x^3(x^2 - 2)(x^2 - 27) \Rightarrow \\ & \Rightarrow 5x^3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{27})(x + \sqrt{27}) \Rightarrow \underline{\underline{5x^3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 3\sqrt{3})(x + 3\sqrt{3})}} \end{aligned}$$

3 točke 3) Zapišite naslednje množice (pomagajte si s sliko na številski osi)

$$[-1, 0) \cap (-1, 3)$$

$$[-3, 2) \cup [2, 6)$$

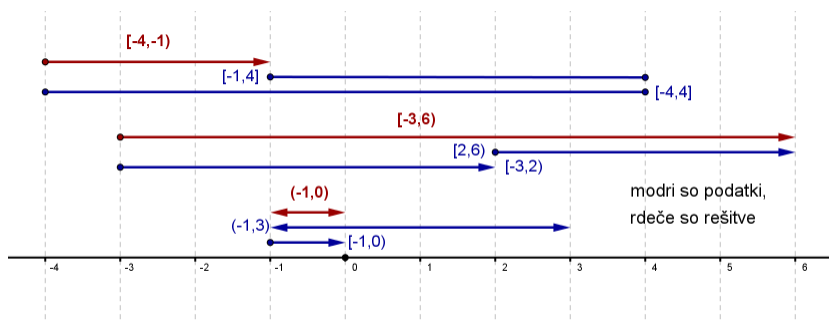
$$[-4, 4] - [-1, 4]$$

- Iz slike lahko razberemo:

$$[-1, 0) \cap (-1, 3) = \underline{\underline{(-1, 0)}}$$

$$[-3, 2) \cup [2, 6) = \underline{\underline{[-3, 6)}}$$

$$[-4, 4] - [-1, 4] = \underline{\underline{[-4, -1]}}$$



6 točk 4) Obravnavajte neenačbo glede na vrednost parametra a .

$$a(x+1) < a^2 - (x+2)$$

• $a(x+1) < a^2 - (x+2) \Rightarrow ax + a < a^2 - x - 2 \Rightarrow ax + x < a^2 - a - 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (a+1)x < (a-2)(a+1)$ Ko delimo (krajšamo) z $a+1$, razlikujemo 3 primere:

1) $a+1 > 0 \Rightarrow \underline{a > -1}$ $(a+1)x < (a-2)(a+1) \Rightarrow \underline{x < a-2}$

2) $a+1 = 0 \Rightarrow \underline{a = -1}$ $0 \cdot x < (a-2) \cdot 0 \Rightarrow 0 < 0_{ni\ res} \Rightarrow \underline{x \in \emptyset}$

3) $a+1 < 0 \Rightarrow \underline{a < -1}$ $(a+1)x < (a-2)(a+1) \Rightarrow \underline{x > a-2}$ znak < se je obrnil

6 točk 5) Rešite sistem neenačb, rešitve zapišite z intervali in jih predstavite na številski premici.

$$\frac{x+1}{2} - \frac{5x+1}{3} \leq \frac{1}{6}, \quad x - \frac{3x+1}{2} - \frac{x-14}{3} \geq 0$$

• $\frac{x+1}{2} - \frac{5x+1}{3} \leq \frac{1}{6} \quad | \cdot 6 \Rightarrow 3x+3-10x-2 \leq 1 \Rightarrow -7x \leq 0 \quad | : (-7) \Rightarrow \underline{x \geq 0}$

$$x - \frac{3x+1}{2} - \frac{x-14}{3} \geq 0 \quad | \cdot 6 \Rightarrow 6x - 9x - 3 - 2x + 28 \geq 0 \Rightarrow -5x \geq -25 \quad | : (-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x \leq 5}$$

Skupna rešitev je $x \geq 0 \wedge x \leq 5$ ali $0 \leq x \leq 5$ ali $x \in [0, 5]$.

3 točke 6a) Rešite neenačbo in rešitev predstavite na številski premici.

$$|x-3| \geq \sqrt{2}$$

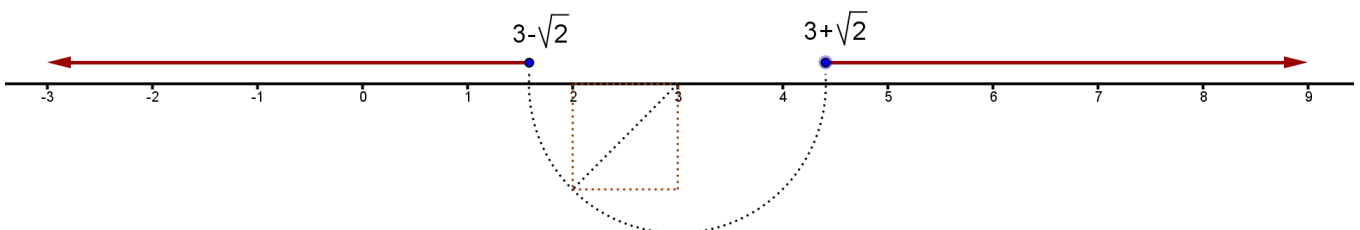
• Lahko rešujemo z uporabo razdalje: $|x-3| \geq \sqrt{2}$ pomeni, da moramo poiskati tista števila x , ki so od 3 oddaljena $\sqrt{2}$ ali več. Od števila 3 se moramo premakniti za več kot $\sqrt{2}$ na desno in levo.

Rešitev so vsi x , ki so več kot za $\sqrt{2}$ na desni od 3 ali več kot za $\sqrt{2}$ na levi: $\underline{x \geq 3 + \sqrt{2} \vee x \leq 3 - \sqrt{2}}$

• Lahko pa rešujemo tudi drugače: $|a| \geq \sqrt{2}$ pomeni, da velja $a \geq \sqrt{2} \vee a \leq -\sqrt{2}$, torej

$$x-3 \geq \sqrt{2} \vee x-3 \leq -\sqrt{2} \Rightarrow \underline{x \geq 3 + \sqrt{2} \vee x \leq 3 - \sqrt{2}}$$

Še narišimo:



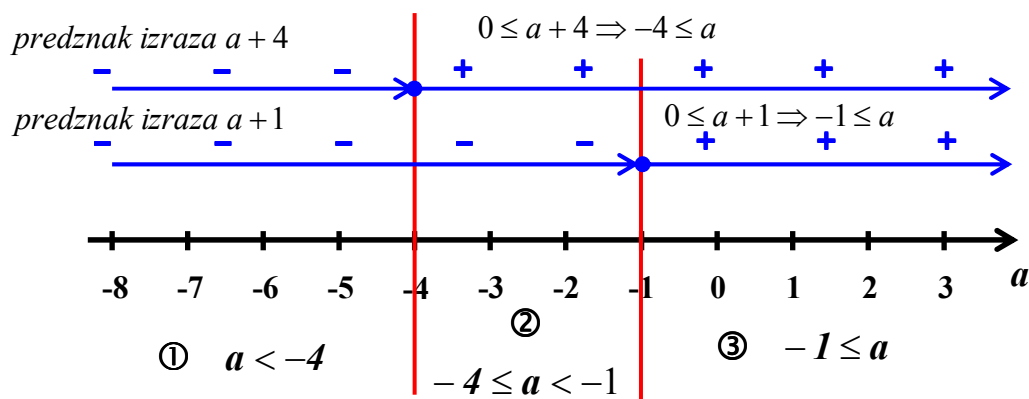
6 točk b) Glede na vrednost parametra a poiščite vrednost izraza.

$$\frac{a+7}{|a+4|} + \frac{|a+1|}{a+4}$$

Vrednost absolutne vrednosti je odvisna od predznaka izraza v ogradi $| \cdot |$, in sicer

$|izraz| = izraz$, če je $izraz \geq 0$ in $|izraz| = -izraz$, če je $izraz < 0$.

Na številski osi označimo predznaka obeh izrazov: $a+4$ in $a+1$, da bomo videli, kakšne možnosti obstajajo.



① $a < -4$

$$\frac{a+7}{|a+4|} + \frac{|a+1|}{a+4} = -\frac{a+7}{a+4} - \frac{a+1}{a+4} = \frac{-a-7-a-1}{a+4} = \frac{-2a-8}{a+4} = \frac{-2(a+4)}{a+4} = -2$$

② $-4 \leq a < -1$

$$\frac{a+7}{|a+4|} + \frac{|a+1|}{a+4} = \frac{a+7}{a+4} - \frac{a+1}{a+4} = \frac{a+7-a-1}{a+4} = \frac{6}{a+4}$$

razen pri $a = -4$, ko vrednost izraza ni določena

③ $-1 \leq a$

$$\frac{a+7}{|a+4|} + \frac{|a+1|}{a+4} = \frac{a+7}{a+4} + \frac{a+1}{a+4} = \frac{a+7+a+1}{a+4} = \frac{2a+8}{a+4} = \frac{2(a+4)}{a+4} = 2$$

3 točke 7) Narišite množico vseh točk v ravnini, za katere je :

$$(1 < x \leq 3) \wedge (-3 \leq y < 1)$$

Množico predstavlja sivo obarvani pravokotnik.

