

*LJUDSKA UNIVERZA
KOČEVJE*

MATEMATIKA

Predavanja za 4. in 5. letnik

Franc Žganjar, prof.

Kočevje, 19. marec 2007

Skripta je last avtorja. Za objavlanje in kopiranje skripte je potrebno njegovo soglasje.

Tekst je oblikovan z \LaTeX urejevalnikom besedil.

Kazalo

1	EkspONENTNA funkcija in logaritem	1
1.1	Kaj je funkcija?	1
1.2	EkspONENTNA funkcija	2
1.2.1	Definicija	2
1.2.2	Omejitve funkcije	2
1.2.3	Naraščanje in padanje funkcije	2
1.2.4	Naloge	3
1.3	EkspONENTNE enačbe	3
1.3.1	Zgledi	4
1.3.2	Naloge	4
1.4	LogaritemSKA funkcija	6
1.4.1	Definicija	7
1.4.2	Pravila za logaritmiranje	8
1.4.3	Prehod k novi osnovi	9
1.4.4	LogaritemSKE enačbe	10
1.4.5	Načrtovanje logaritemSKE funkcije	10
2	POLINOMI	12
2.1	Definicija polinoma	12
2.2	Seštevanje in odštevanje polinomov	13
2.3	Množenje polinomov	14
2.3.1	Množenje polinoma s konstanto	14
2.3.2	Produkt dveh polinomov	14
2.4	Deljenje polinomov	15
2.4.1	Postopek deljenja	16
2.4.2	Hornerjev algoritem	17
2.5	Ničle polinoma. Enakost polinomov	19
2.5.1	Ničle polinoma	19
2.5.2	Enakost polinomov	20
2.6	Iskanje ničel	21
2.6.1	Razcep polinoma	21
2.6.2	Uporaba Hornerjevega algoritma	23

2.6.3	Bisekcija	24
2.7	Graf polinoma	27
2.7.1	Primer	27
2.7.2	Naloga	28
3	Racionalne funkcije	29
3.1	Definicija racionalne funkcije	29
3.2	Graf racionalne funkcije	29
3.3	Asimptote	31
3.4	Zgledi	31
3.5	Racionalne enačbe	35
3.5.1	Primeri	35
3.5.2	Naloge	38
3.6	Racionalne neenačbe	38
3.6.1	Primeri	38
3.6.2	Naloge	42
4	Kotne funkcije in trigonometrija	43
4.1	Pravokotni trikotnik	43
4.2	Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku	43
4.2.1	Sinus	43
4.2.2	Kosinus	44
4.2.3	Tangens	44
4.2.4	Kotangens	44
4.3	Primeri	44
4.4	Vrednosti nekaterih kotnih funkcij	45
4.5	Definicija funkcij sinus in kosinus	46
4.6	Definicija funkcij tangens in kotangens	48
4.7	Vrednosti kotnih funkcij za različne kote	49
4.8	Predznak kotnih funkcij	49
4.9	Naloge	50
4.10	Lastnosti kotnih funkcij in prehod na ostri kot	51
4.10.1	Sinus in kosinus	51
4.10.2	Tangens in kotangens	55
4.10.3	Kotne funkcije komplementarnih kotov	58
4.10.4	Zveze med kotnimi funkcijami	59
4.11	Grafi kotnih funkcij	60
4.11.1	Sinus	60
4.11.2	Kosinus	62
4.11.3	Tangens	63
4.11.4	Graf funkcije $f(x) = A \cdot \sin(ax)$	65
4.11.5	Graf funkcije $f(x) = A \cdot \cos(ax)$	67

4.12	Adicijski izreki in posledice	68
4.12.1	Adicijski izreki	68
4.12.2	Uporaba adicijskih izrekov	68
4.12.3	Dvojni in polovični koti	69
4.13	Kot med premicama	70
4.13.1	Primer	71
5	Površine in prostornine	72
5.1	Prizma	72
5.1.1	Površina prizme	73
5.1.2	Prostornina prizme	74
5.1.3	Zgledi	74
5.2	Piramida	76
5.2.1	Površina piramide	77
5.2.2	Prostornina piramide	78
5.2.3	Zgledi	79
5.3	Valj	82
5.3.1	Površina valja	83
5.3.2	Prostornina valja	83
5.3.3	Zgledi	84
5.4	Stožec	86
5.4.1	Površina stožca	87
5.4.2	Prostornina stožca	88
5.4.3	Zgledi	89
5.5	Krogla	90
5.5.1	Površina krogle	90
5.5.2	Prostornina krogle	91
5.5.3	Zgledi	92
5.6	Vaje za utrjevanje	93
6	Zaporedja	97
6.1	Definicija zaporedja	97
6.1.1	Zgledi	98
6.2	Aritmetično zaporedje	101
6.2.1	Uvodni primer	101
6.2.2	Definicija	101
6.3	Vsota aritmetičnega zaporedja	102
6.3.1	Primeri	103
6.4	Geometrijsko zaporedje	107
6.4.1	Uvodni primer	107
6.4.2	Definicija	107
6.4.3	Vsota geometrijskega zaporedja	110

6.4.4	Primeri	111
6.5	Naloge za ponavljanje	115
6.5.1	Aritmetično zaporedje	115
6.5.2	Geometrijsko zaporedje	119
	Literatura	126

Slike

1.1	Funkcija f	1
1.2	Funkcija $f(x) = 2^x$	2
1.3	Funkcija $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	3
1.4	Graf funkcij $y = 10^x$ in $y = \log x$	11
2.1	Graf polinoma $p(x) = -2x^3 + 6x - 4$	28
3.1	Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$	32
3.2	Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$	33
3.3	Graf funkcije $f(x) = \frac{2x-4}{-x+1}$	34
3.4	Graf funkcije $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-4}$	35
3.5	Rešitev $(-3, 1)$	39
3.6	Rešitev $(-\infty, -3] \cup (-1, 3) \cup [5, \infty)$	41
3.7	Rešitev $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$	42
4.1	Pravokotni trikotnik	43
4.2	Zasuk točke A	46
4.3	Zasuk točke A	46
4.4	$\sin \alpha$ in $\cos \alpha$ v enotski krožnici	47
4.5	Definicija funkcij $\operatorname{tg} \alpha$ in $\operatorname{ctg} \alpha$	48
4.6	Predznak kotnih funkcij	49
4.7	Periodičnost	51
4.8	Sodost in lihost	52
4.9	Kot α in kot $180^\circ + \alpha$	53
4.10	Kot α in kot $180^\circ - \alpha$	54
4.11	Pravokotni trikotnik	58
4.12	Funkcija $f(x) = \sin x$	61
4.13	Funkcija $f(x) = \cos x$	62
4.14	Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$	64

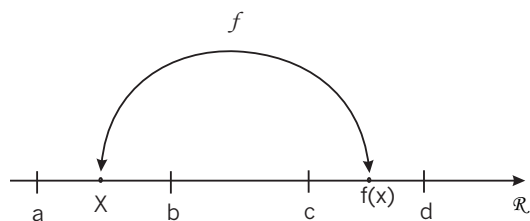
4.15	Funkcija $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$	66
4.16	Funkcija $f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$	67
4.17	Kot med premicama	70
5.1	Plašč prizme	73
5.2	Plašč stožca	87
5.3	Presek krogle	90
6.1	Graf zaporedja $f(n) = 2n + 1$	100

Poglavje 1

Eksponentna funkcija in logaritem

1.1 Kaj je funkcija?

Predpis f , ki priredi neki vrednosti spremenljivke x iz intervala (a, b) natančno določeno vrednost ali sliko $f(x)$ na intervalu (c, d) , imenujemo *funkcija* ali *preslikava*. (Glej sliko 1.1.)



Slika 1.1: Funkcija f

Zapis:

$$f : x \mapsto f(x)$$

ali

$$y = f(x)$$

x – neodvisna spremenljivka

y – odvisna spremenljivka

1.2 Eksponentna funkcija

1.2.1 Definicija

Funkcijo oblike $f(x) = a^x$, ki ima neodvisno spremenljivko v eksponentu, imenujemo **eksponentna funkcija**. Eksponentno funkcijo včasih zapišemo kot $x \mapsto a^x$.

1.2.2 Omejitve funkcije

Za osnovo a lahko vzamemo le pozitivno število, različno od 1 ($a > 0, a \neq 1$), za eksponent x pa poljubno realno število. ($x \in \mathbb{R}$)

Zgled:

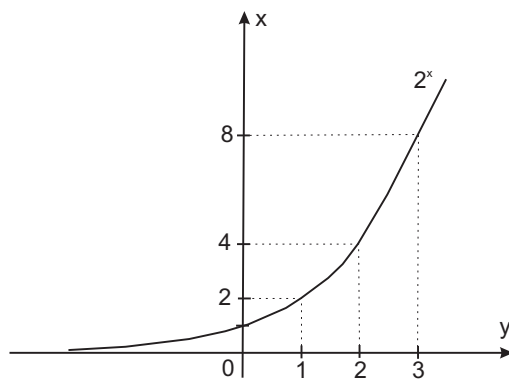
V primeru, da ne upoštevamo pogoja $a > 0$, dobimo za $a = -4$ in $x = \frac{1}{2}$:

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9}.$$

Kvadratni koren iz negativnega števila pa ne obstaja v množici realnih števil. (\mathbb{R})

1.2.3 Naraščanje in padanje funkcije

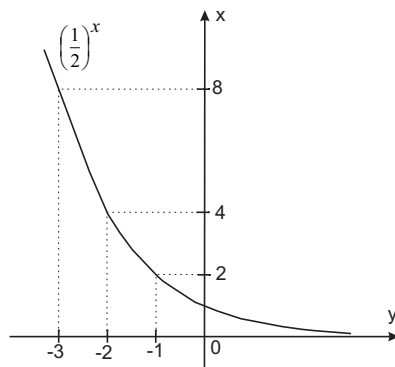
☞ Za $a > 1$ je eksponentna funkcija $f(x) = a^x$ naraščajoča. (Glej sliko 1.2.)



Slika 1.2: Funkcija $f(x) = 2^x$

To pomeni, da za vsak $x_1 < x_2$ sledi $[f(x_1) = y_1] < [f(x_2) = y_2]$.

☞ Za $0 < a < 1$ je eksponentna funkcija $f(x) = a^x$ padajoča funkcija. (Glej sliko 1.3.)



Slika 1.3: Funkcija $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

To pomeni, da za vsak $x_1 < x_2$ sledi $[f(x_1) = y_1] > [f(x_2) = y_2]$.

1.2.4 Naloge

① Sestavi preglednice za naslednje funkcije. Funkcije tudi nariši.

- ✎ $f(x) = 3^x$
- ✎ $f(x) = 10^x$
- ✎ $f(x) = 3^{5x-5}$

② Nariši grafa funkcij $f(x) = 2^x$ in $f(x) = -2^x$ na isti koordinatni sistem. Kaj opaziš?

1.3 Eksponentne enačbe

Enačbo, ki ima neznanko v eksponentu, imenujemo **eksponentna enačba**.

Eksponentne enačbe rešujemo po naslednjem postopku:

☞ Levo in desno stran enačbe skušamo zapisati z enakima osnovama.

☞ Nato enačbo rešimo s sklepom, da sta dve potenci z enakima osnovama enaki natanko takrat, kadar sta enaka tudi eksponenta. (Sklep velja samo za vsako pozitivno število, ki ni enako 0 ali 1.)

1.3.1 Zgledi

(a) $2^x = 8$ (**R:** $x = 3$)

(b) $3^x = 81$ (**R:** $x = 4$)

(c) $3^{5x+2} \cdot 3^{2(x-2)} : 3^{3(x-1)} = 3^{-2}$ (**R:** $x = -\frac{3}{4}$)

1.3.2 Naloge

① Reši naslednje enačbe:

(a) $0,1^x = 10$ (**R:** $x = -1$)

(b) $4^x = 32$ (**R:** $x = 2, 5$)

(c) $5^{x-1} = 125$ (**R:** $x = 4$)

(d) $3^{x-1} = 81$ (**R:** $x = 5$)

(e) $0,4^x = \frac{5}{2}$ (**R:** $x = -1$)

(f) $a^{2x} \cdot a^{1-3x} = a^{5x} : a^{3x-1}$ (**R:** $x = 0$)

(g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4x}{5}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{7+x}$ (**R:** $x = -5$)

(h) $4^{(a+2)^2} \cdot (2^{a-2})^{a+2} : 4^{2a} = 8^{a^2-1}$ (**R:** $x = -\frac{7}{4}$)

(i) $3 \cdot 2^x - 2^{x-1} - 24 \cdot 2^{x-5} = 14$ (**R:** $x = 3$)

(j) $3^{x+3} - 7 \cdot 3^{x+1} + 9 \cdot 3^{x-1} = 1$ (**R:** $x = -2$)

(k) $\sqrt[3]{2^x} \cdot 4^{x-1} = 0,125$ (**R:** $x = -\frac{3}{7}$)

$$(l) \quad 5^x - 20 \cdot 5^{x-2} - 8 \cdot 3^{x-4} = 13 \cdot 3^{x-2} \quad (\mathbf{R}: x = 4)$$

$$(m) \quad 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25 \cdot \sqrt{27} \quad \left(\mathbf{R}: x = \frac{7}{2} \right)$$

$$(n) \quad (2^{x+1})^{x+4} \cdot 4^{(x-3)^2} : 16^{7-x} = 1 \quad (\mathbf{R}: x_1 = 2, x_2 = -1)$$

$$(o) \quad 9^x = \left(\sqrt{3\sqrt{3}} \right)^{-1} \quad \left(\mathbf{R}: x = -\frac{3}{8} \right)$$

1.4 Logaritemska funkcija

Oglejmo si enačbo

$$b^n = a.$$

☞ Če vzamemo za $b = 3$ in za $n = 4$, potem vrednost a lahko izračunamo:

$$a = 3^4$$

in od tod sledi

$$a = 81.$$

Izračunali smo vrednost potence 3^4 , računsko operacijo pa smo imenovali **potenciranje**.

☞ Kaj pa, če poznamo vrednosti za a in n in iščemo osnovo b ? Vzemimo za $a = 125$ in $n = 3$. Iz

$$b^3 = 125$$

sledi

$$b = \sqrt[3]{125} = 5.$$

Postopek smo imenovali **korenjenje**.

☞ Na koncu nam preostane še možnost, da poznamo vrednosti za a in b iščemo pa vrednost potence n . Pa vzemimo za $a = 27$ in $b = 3$:

$$3^n = 27. \tag{1.1}$$

Vrednost potence lahko uganemo:

$$3^n = 3^3 \Rightarrow n = 3.$$

Te računske operacije še ne poznamo, imenujemo jo **logaritmiranje**.

Ker je ugibanje vrednosti potence zelo zamuden postopek, zapišemo

$$n = \log_b a, \tag{1.2}$$

natanko tedaj, ko je

$$b^n = a.$$

Povejmo takoj, da zveza velja za $a > 0$ in $b > 0$, $b \neq 1$.

Kot smo že povedali to računsko operacijo imenujemo logaritmiranje, število n imenujemo **logaritem** z osnovo b števila a . Število a imenujemo **logaritmand**, b pa **osnova**.

1.4.1 Definicija

Logaritem je eksponent, s katerim moramo potencirati osnovo, da dobimo logaritmand.

$$n = \log_b a \Leftrightarrow b^n = a, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1 \quad (1.3)$$

Naloge:

① Zapiši v logaritemski obliki.

- (a) $4^n = 12$
- (b) $3^x = 5$
- (c) $5^n = c$
- (d) $1,5^x = 100$
- (e) $10^y = 100$
- (f) $\left(\frac{3}{4}\right)^y = \frac{1}{2}$

② Reši enačbe.

- (a) $\log_2 16 = x$ (**R:** $x = 4$)
- (b) $\log_3 x = 2$ (**R:** $x = 9$)
- (c) $\log_{10} 100 = x$ (**R:** $x = 2$)
- (d) $\log_8 \left(\frac{1}{16}\right) = x$ (**R:** $x = -\frac{4}{3}$)

$$(e) \log_{25} 0,2 = x \quad \left(\mathbf{R} : x = -\frac{1}{2} \right)$$

$$(f) \log_{10} x = -2 \quad (\mathbf{R} : x = 0,01)$$

$$(g) \log_9 x = 1,5 \quad (\mathbf{R} : x = 27)$$

$$(h) \log_{125} x = \frac{1}{3} \quad (\mathbf{R} : x = 5)$$

$$(i) \log_x 9 = -\frac{2}{3} \quad \left(\mathbf{R} : x = \frac{1}{27} \right)$$

$$(j) \log_x 3 = \frac{1}{4} \quad (\mathbf{R} : x = 81)$$

1.4.2 Pravila za logaritmiranje

$$\log_a 1 = 0 \tag{1.4}$$

$$\log_a a = 1 \tag{1.5}$$

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x \tag{1.6}$$

$$\log_a a^n = n \tag{1.7}$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \tag{1.8}$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \tag{1.9}$$

$$\log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x = \frac{(\log_a x)}{y} \tag{1.10}$$

Sedaj lahko s pomočjo logaritmov rešimo primer, ki smo si ga izbrali na začetku poglavja – enačba (1.1):

$$n = \log_3 27$$

$$n = \log_3 3^3$$

$$n = 3 \log_3 3$$

po enačbi (2.5) sledi

$$n = 3 \cdot 1$$

$$n = 3.$$

Naloga:

① Izračunaj logaritem pri poljubni osnovi.

$$(a) A = \frac{a^2 b}{a^3}$$

$$(c) B = \frac{m^2}{\sqrt{n}}$$

$$(b) C = \sqrt{\frac{3m^4}{n^3}}$$

$$(d) D = \frac{4\pi r^3}{3}$$

1.4.3 Prehod k novi osnovi

V praksi nastopajo logaritmi z dvema osnovama. Prva je osnova 10 in logaritmom z osnovo 10 pravimo **desetiški ulomki** in jih označimo:

$$\log_{10} x = \log x. \quad (1.11)$$

Druga osnova je število e , in sicer je $e = 2,7182818\dots$ število e je iracionalno število.

Logaritmom z osnovo e pravimo **naravni logaritmi** in jih označimo z:

$$\log_e x = \ln x. \quad (1.12)$$

Z ene osnove logaritma preidemo na drugo osnovo s pomočjo naslednje enačbe:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}} \quad (1.13)$$

Naloga:

① Izračunaj tako, da prevedeš logaritme na isto osnovo.

(a) $\log_5 3 \cdot \log_3 25$ (**R:** 2)

(b) $\log_b a \cdot \log_a b^2$ (**R:** 2)

(c) $\log_{16} 9 - \log_4 3$ (**R:** 0)

(d) $\log_9 54 - \log_3 \sqrt{6}$ (**R:** 1)

1.4.4 Logaritemske enačbe

Enačba je logaritemska, če neznanka nastopa v logaritmu. Tako enačbo rešimo po definiciji za logaritem, če je v enačbi en sam logaritem. Če je v enačbi več logaritmov, vse logaritme najprej prevedemo na isto osnovo in jo nato antilogaritmiramo. Včasih pa enačbe rešimo z uvedbo nove neznanke.

Zgled:

Reši enačbo: $\log(x + 6) + \log(x - 4) = 2 \cdot \log x$.

Po enačbi (1.6) in enačbi (1.8) sledi:

$$(x + 6)(x - 4) = x^2$$

$$x^2 + 2x - 24 = x^2$$

$$2x = 24$$

$$x = 12.$$

Naloga:

① Reši logaritemsko enačbo.

(a) $\log(x + 2) + \log(x - 5) = 2 \log(x - 2)$ (**R:** $x = 14$)

(b) $\log 5 + \log x - \log(x + 1) = \log 3$ (**R:** $x = \frac{3}{2}$)

(c) $\log x - \log(x - 3) = \log(x - 4)$ (**R:** $x = 6$)

(d) $\log y = \log(y + 10) - \log(y + 4)$ (**R:** $y = 2$)

1.4.5 Načrtovanje logaritemske funkcije

Do sedaj smo spoznali, da je eksponentna funkcija oblike $f(x) = a^x$, logaritemska pa ima obliko $f(x) = \log_a x$. Zapišimo enačbi grafov funkcij:

☞ enačba grafa eksponentne funkcije: $y = a^x$

☞ enačba grafa logaritemske funkcije: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Enačbi $y = a^x$ in $x = a^y$ sta precej podobni, le vlogi spremenljivk sta spremenjeni. Kaj to pomeni si bomo ogledali na primeru.

Primer:

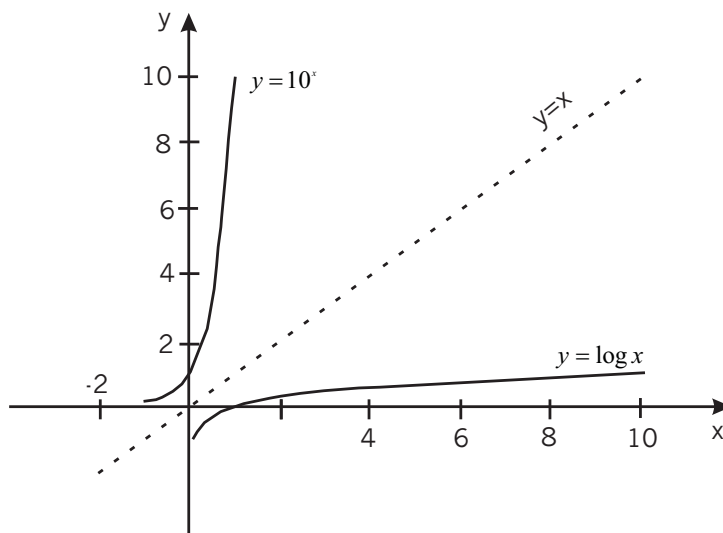
Narišimo grafa funkcij $y = 10^x$ in $y = \log x$ na isti graf.

• $y = 10^x$

x	$y = 10^x$
-1	$\frac{1}{10}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{10}$
1	10

• $y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$

y	$x = 10^y$
-1	$\frac{1}{10}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{10}$
1	10



Slika 1.4: Graf funkcij $y = 10^x$ in $y = \log x$

Iz slike 1.4 vidimo, da sta grafa $y = 10^x$ in $y = \log x$ simetrična glede na simetralo lihih kvadrantov. Torej lahko graf $y = \log x$ načrtamo tako, da prezrcalimo graf 10^x čez simetralo lihih kvadrantov.

Taki funkciji imenujemo **inverzni funkciji**. Lahko tudi posplošimo: logaritemska funkcija je inverzna funkcija k eksponentni funkciji (z isto osnovo) in obratno.

Poglavje 2

Polinomi

2.1 Definicija polinoma

Polinom je vsota potenc spremenljivke x z naravnimi eksponenti in realnimi koeficienti a_k :

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2.1)$$

in je stopnje n , če je $a_n \neq 0$. Polinom je definiran zavsako število x .

Najvišja potenca števila x , ki v polinomu nastopa (torej n) se imenuje **stopnja polinoma**, tisti člen ki najvišjo potenco vsebuje, pa vodilni člen polinoma ($a_n \cdot x^n$), a_n je potem **vodilni koeficient**, svoje ime pa ima tudi a_1 , ki mu rečemo **konstantni (prosti) člen**.

Primer:

$$p(x) = 3x^4 + 2x^2 - 3x + 7$$

Polinom $p(x)$ je stopnje 4, vodilni člen je $3x^4$, vodilni koeficient 3, konstantni člen pa 7.

Nekaj polinomov že poznamo in sicer:

- ☞ polinomom stopnje 0 rečemo *konstantna funkcija*
- ☞ polinome stopnje 1 imenujemo *linearna funkcija*
- ☞ polinome stopnje 2 imenujemo *kvadratna funkcija*.

2.2 Seštevanje in odštevanje polinomov

Vsota in razlika dveh polinomov je spet polinom.

Primer:

$$\begin{aligned} p(x) &= 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 1 \\ q(x) &= -x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

✎ Seštevanje:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 1) + (-x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 2) \\ &= 4x^4 - x^4 - 3x^3 + 5x^3 + 2x^2 + 2x^2 - x + 1 + 2 \\ &= 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - x + 3 \end{aligned}$$

✎ Odštevanje:

Razliko računamo podobno

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 1) - (-x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 2) \\ &= 4x^4 + x^4 - 3x^3 - 5x^3 + 2x^2 - 2x^2 + x + 1 - 2 \\ &= 5x^4 - 8x^3 + x - 1 \end{aligned}$$

Polinom, ki ga dobimo pri seštevanju ali odštevanju polinomov, ima takšno stopnjo, kot je največja izmed stopenj vodilnih členov polinomov, ki nastopajo v računskih operacijah.

Naloga

① Dani so polinomi $p_1(x) = 4x^3 - 2x + 5$, $p_2(x) = x^2 - x + 2$, in $p_3(x) = 2x^2 + x + 5$. Izračunaj:

(a) $p_1(x) + p_2(x)$ (**R:** $4x^3 + x^2 - 3x + 7$)

(b) $p_2(x) - p_3(x)$ (**R:** $-x^2 - 2x - 3$)

(c) $p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)$ (**R:** $4x^3 + 3x^2 - 2x + 12$)

2.3 Množenje polinomov

Polinome lahko množimo na dva načina tako, da:

- ☞ polinom množimo s konstanto
- ☞ množimo med seboj različne polinome.

2.3.1 Množenje polinoma s konstanto

To storimo tako, da s konstanto pomnožimo vse koeficiente in dobimo spet nov polinom. Pri tem se stopnja ohrani, če je konstanta različna od 0.

Primer:

Polinom $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$ pomnoži s konstanto 3:

$$3 \cdot p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x - 12$$

2.3.2 Produkt dveh polinomov

Vsak člen prvega polinoma pomnožimo z vsakim členom drugega.

Primer:

Pomnoži $p(x) = 2x^2 - x + 2$ in $q(x) = 3x^2 - x + 1$:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (2x^2 - x + 2)(3x^2 - x + 1) \\ &= 6x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x^3 + x^2 - x + 6x^2 - 2x + 2 \\ &= 6x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Naloge

- ① Iz danih polinomov $p(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ in $q(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$ sestavi nove na naslednji način:

(a) $p(x) + 2q(x)$ (**R:** $3x^2 - 2x + 5$)

$$(b) \quad 3p(x) + 3q(x) \quad (\mathbf{R}: 3x^3 + 3x^2 - 3x + 9)$$

$$(c) \quad \frac{1}{2}p(x) - \frac{3}{2}q(x) \quad \left(\mathbf{R}: \frac{5}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \right)$$

② Zmnoži naslednje polinome (izvrši zahtevane operacije):

$$(a) \quad (x^3 - x + 2)(x^2 - 5) \quad (\mathbf{R}: x^5 - 6x^3 + 2x^2 + 5x - 10)$$

$$(b) \quad (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) \quad (\mathbf{R}: x^4 + 1)$$

$$(c) \quad (3x - 1)^2 + (2x + 5)^2 \quad (\mathbf{R}: 13x^2 + 14x + 26)$$

$$(d) \quad (x^2 - 1)^3 \quad (\mathbf{R}: x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)$$

$$(e) \quad (3x - 5)^2 - (3x - 5)(3x + 5) \quad (\mathbf{R}: -30x + 50)$$

2.4 Deljenje polinomov

Kadar med seboj delimo dve naravni števili, dobimo kot rezultat neko število, ki mu rečemo **količnik** in v večini primerov še **ostanek**.

Če 13 delimo z 2, dobimo količnik 6 in ostanek 1. Torej je $13 = 6 \cdot 2 + 1$. V splošnem lahko zapišemo deljenje števila a s številom b :

$$a = k \cdot b + r \tag{2.2}$$

k – *količnik*

r – *ostanek*

Ostanek r je manjši od števila s katerim smo delili: $0 \leq r < b$. Če je ostanek enak 0, se deljenje izide in je število a deljivo z b .

Podobno pravilo velja za polinome. Naj bo $p(x)$ polinom stopnje n , $q(x)$ pa polinom stopnje m . Potem lahko zapišemo:

$$p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x) \tag{2.3}$$

$k(x)$ – *količnik*

$r(x)$ – *ostanek*

Stopnja ostanka je strogo manjša od stopnje polinoma, s katerim delimo. Stopnja količnika pa je razlika stopenj **deljenca** $p(x)$ in **delitelja** $q(x)$.

2.4.1 Postopek deljenja

Deli $p(x) = (3x^4 + 5x^3 + x^2 - x - 7)$ s $q(x) = (3x^2 + 2x - 4)$.

$$\begin{array}{r}
 (3x^4 + 5x^3 + x^2 - x - 7) : (3x^2 + 2x - 4) = x^2 + x + 1 \\
 \underline{3x^4 + 2x^3 - 4x^2} \\
 3x^3 + 5x^2 - x - 7 \\
 \underline{3x^3 + 2x^2 - 4x} \\
 3x^2 + 3x - 7 \\
 \underline{3x^2 + 2x - 4} \\
 x - 3
 \end{array}$$

Količnik $k(x) = x^2 + x + 1$ in ostanek $r(x) = x - 3$.

Naloge

① *Deli med seboj naslednje polinome:*

- (a) $(x^2 + 4x + 7) : (x + 3)$ (**R:** $x + 1$)
- (b) $(x^4 + 4x^2 + 12) : (x^2 - 3)$ (**R:** $x^2 + 7$)
- (c) $(3x^3 + 5x^2 - x - 1) : (3x^2 + 2x - 3)$ (**R:** $x + 1$)
- (d) $(4x^5 - x^3 + 2x - 1) : (x - 2)$ (**R:** $4x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 30x + 62$)
- (e) $(-6x^3 + 3x^2 + 10x - 5) : (2x - 1)$ (**R:** $-3x^2 + 5$)

② *Kateri polinom moramo deliti s $q(x) = 2x^2 - x + 1$, da dobimo količnik $2x + 2$ in ostanek 3? (**R:** $4x^3 + 2x^2 + 5$)*

2.4.2 Hornerjev algoritem

Oglejmo si natančneje deljenje polinoma $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7$ s $q(x) = x - 2$.

$$\begin{array}{r}
 (3x^3 - 2x^2 + x - 7) : (x - 2) = 3x^2 + 4x + 9 \\
 \underline{3x^3 - 6x^2} \\
 4x^2 + x - 7 \\
 \underline{4x^2 - 8x} \\
 9x - 7 \\
 \underline{9x - 18} \\
 11
 \end{array}$$

V računu smo nekatere člene večkrat zapisali, zato ponovno zapišimo shemo, v kateri bodo samo koeficienti in izpustimo vse ponovitve že zapisanih členov.

$$\begin{array}{r}
 3 \quad -2 \quad +1 \quad -7 \quad -2 \\
 \underline{-6} \\
 4 \\
 \quad \underline{-8} \\
 \quad 9 \\
 \quad \quad \underline{-18} \\
 \quad \quad 11
 \end{array}$$

Če preuredimo zapis v tri vrstice in prosti člen polinoma $q(x)$ (-2) pišemo na levo, dobimo:

	3	-2	1	-7
-2		-6	-8	-18
	3	4	9	11

V prvi vrstici imamo koeficiente polinoma, ki ga delimo $-p(x)$. Koeficiente v drugi vrstici dobimo tako, da z (-2) pomnožimo predhodnika iz tretje vrstice. V zadnji vrstici pa dobimo rezultat, tako da odštevamo števili v stolpcu nad določenim koeficientom.

Ta postopek se imenuje po angleškem matematiku **William Georgu Hornerju (1786 – 1837)**. Podoben postopek so poznali Kitajci 100 let pred našim štetjem.

Oglejmo si deljenje poljubnega polinoma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ z linearnim polinomom $q(x) = x - c$.

- V zgornjo vrstico po vrsti zapišemo koeficiente polinoma $p(x)$. Če kakšna potenca manjka, zapišemo 0. Število c pa vpišemo v levi del tabele.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_0
c					

- Prvi koeficient iz zgornje vrstice prepisemo v tretjo vrstico.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_0
c					
	a_n				

- Pomnožimo c z a_n in rezultat vpišemo na drugo mesto druge vrstice, nato pa odštejemo obe števili v stolpcu in rezultat vpišemo v tretjo vrstico. Postopek ponavljamo do konca tabele.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_0
c		$a_n \cdot c$	$c(a_{n-1} + a_n c)$		
	a_n	$a_{n-1} + a_n \cdot c$			

V zadnji vrstici dobimo na prvih $n-1$ mestih koeficiente količnika, na zadnjem mestu pa ostanek.

Primer

Polinom $p(x) = x^4 - 2x + 2$ deli s $q(x) = x + 3$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & & 3 & -9 & 27 & -87 \\ \hline & 1 & -3 & 9 & -29 & \boxed{89} \end{array}$$

Torej je

$$x^4 - 2x + 2 = (x + 3)(x^3 - 3x^2 + 9x - 29) + 89,$$

pri čemer nam 89 predstavlja ostanek pri deljenju.

Naloge

Deli med seboj naslednje polinome s pomočjo Hornerjevega algoritma:

(a) $p(x) = x^5 + 1$ in $q(x) = x + 1$

(b) $p(x) = -2x^3 - 5x^2 + 7$ in $q(x) = x + 3$

(c) $p(x) = 6x^3 - 14x^2 + 16x + 8$ in $q(x) = x - \frac{1}{3}$

2.5 Ničle polinoma. Enakost polinomov

2.5.1 Ničle polinoma

Definicija:

Število x_0 je **ničla** polinoma $p(x)$, če je $p(x_0) = 0$.

Primer:

Število $x = -2$ je ničla polinoma $p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 4$, ker:

$$p(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^3 + 2(-2) + 4 = 16 - 16 - 4 + 4 = 0.$$

Definicija:

Število x_0 je ničla polinoma $p(x)$ natanko tedaj, ko je $p(x)$ deljiv z $x - x_0$:

$$p(x) = (x - x_0) \cdot k(x).$$

Polinom stopnje n ima največ n realnih ničel.

Primer:

$$p(x) = (x - 1)^2(x + 3)^4(x - 5)^3(x + 6)$$

Dani polinom ima stopnjo 10 in ima naslednje ničle:

$$x_{1,2} = 1$$

$$x_{3,4,5,6} = -3$$

$$x_{7,8,9} = 5$$

$$x_{10} = -6.$$

Skupaj ima polinom 10 ničel, kar se ujema s stopnjo polinoma.

2.5.2 Enakost polinomov**Definicija:**

Dva polinoma sta enaka natanko tedaj, ko sta iste stopnje in se ujemata v vseh koeficientih.

Naloge

- ① Določi koeficienta k in l , da se bosta naslednja polinoma ujemala za vsako realno število x .

$$p(x) = x^2 - kx + 14 - l$$

$$q(x) = x^2 - 6x + 1$$

- ② Določi tretjo ničlo x_3 polinoma $p(x) = -2(x+1)^2(x-x_3)$, da bo enak polinomu $q(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6$.

③ Zapiši vse realne ničle in njihove stopnje za naslednje polinome:

$$(a) \quad p(x) = -(x-1)(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$(b) \quad p(x) = (x+2)^3(x^2+2)$$

$$(c) \quad p(x) = (3x-1)(3x+1)(3x+3)$$

2.6 Iskanje ničel

Za iskanje ničel polinoma obstaja več metod. Če je polinom prve ali druge stopnje, rešujemo preprosto linearno oziroma kvadratno enačbo. Pri polinomih višjih stopenj pa si je treba pomagati bodi si z razcepom polinoma; lahko pa ničlo uganemo in jo preizkusimo s Hornerjevim algoritmom. Včasih pa si pomagamo s kakšno numerično metodo, kar pomeni, da dobimo za rezultat le številčni približek prave ničle.

2.6.1 Razcep polinoma

Najbolj elegantna metoda za iskanje ničel je prav gotovo razcep polinoma na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje. Linearni faktorji nam dajo realne, kvadratne pa po dve konjugirani kompleksni ničli.

Seveda so postopki za razcep polinoma popolnoma različni, odvisni od posameznega primera, vseeno pa zapišimo nekaj obrazcev, ki nam bodo pri tem v pomoč:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a) \quad \text{razlika kvadratov} \quad (2.4)$$

$$x^2 + a^2 = (x - ia)(x + ia) \quad \text{vsota kvadratov} \quad (2.5)$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad \text{Viétovi pravili} \quad (2.6)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) \quad \text{razlika kubov} \quad (2.7)$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2) \quad \text{vsota kubov} \quad (2.8)$$

$$x^n - a^n = (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \quad \text{razlika } n - \text{tih potenc} \quad (2.9)$$

Primeri

Razcepi naslednje polinome:

(a) $p(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 16$

Združimo po dva člena skupaj in izpostavimo.

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 16 = x^2(x+4) + 4(x+4) = (x+4)(x^2+4) = (x+4)(x+2i)(x-2i)$$

(b) $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Uporabimo Viétovi pravili.

$$2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

(c) $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

Srednji člen razdelimo na dva dela in združimo po tri skupaj.

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 &= x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 = \\ &= x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

Naloga

Z razcepom določi ničle naslednjih polinomov:

(a) $x^3 - x^2 + x - 1$

(b) $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3$

(c) $8x^3 - 4x^2 + 54x - 27$

2.6.2 Uporaba Hornerjevega algoritma

Definicija

Če je ulomek $\frac{c}{d}$ ničla polinoma $p(x)$, števec c deli prosti člen, imenovalec d pa vodilni koeficient.

Primer

Poišči racionalne ničle polinoma $p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 12x + 9$.

V ta namen najprej določimo vse kandidate za ničlo:

c deli 9: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

d deli 2: $\pm 1, \pm 2$

Kandidati za ničlo so $\frac{c}{d} : \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}$

S Hornerjevim algoritmom ugotovimo, da nobena cela ničla ne pride v upoštevanje.

Kmalu ugotovimo, da je edina realna ničla $-\frac{3}{2}$:

	2	7	12	9
$+\frac{3}{2}$		-3	-6	-9
	2	4	6	0

Preostali dve ničli nato določimo z reševanjem kvadratne enačbe.

Naloga

S pomočjo Hornerjevega algoritma poišči vse realne ničle danih polinomov:

(a) $p(x) = 4x^3 - 4x^2 - 5x + 3$

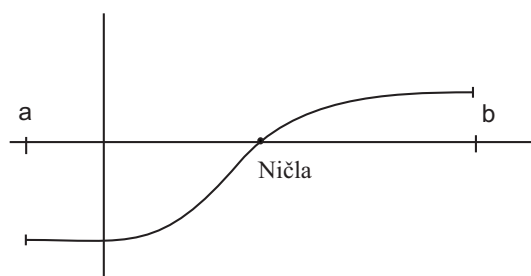
(b) $p(x) = 6x^4 - 19x^3 + 14x^2 + x - 2$

(c) $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

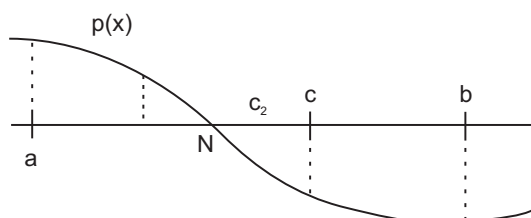
2.6.3 Bisekcija

Bisekcija ali **razpolavljanje** je metoda s katero določimo približno vrednost ničle polinoma, kadar to drugače ni možno. Pri tej metodi si pomagamo s sklepom:

☞ Kadar polinom v dveh različnih točkah zavzame nasprotna predznaka, je nekje med njima zavzel tudi vrednost 0 in ima tam ničlo.



Določimo torej interval, v katerega krajiščih je polinom različno predznačen. Nato interval razpolovimo in pogledamo vrednost v sredinski točki. Ta točka zamenja krajišče v katerem ima polinom isti predznak. Tako smo razpolovili interval, v katerem se ničla nahaja, seveda pa postopek ponavljamo in tako ničlo ujamemo v poljubno majhen interval.



☛ $[a, b]$ je začetni interval in na njem je zagotovo ničla $p(a) > 0$ in $p(b) < 0$

$c = \frac{a+b}{2}$ razpolovišče intervala, $p(c) < 0$, c zamenja b

☛ $[a, c]$ je naslednji interval: $p(a) > 0$ in $p(c) < 0$

$c_1 = \frac{a+c}{2}$ razpolovišče novega intervala, $p(c_1) > 0$, c_1 zamenja a

$$\Rightarrow [c_1, c] : p(c_1) > 0 \text{ in } p(c) < 0$$

$$c_2 = \frac{c_1 + c}{2}; p(c_2) < 0, c_2 \text{ zamenja } c$$

$$\Rightarrow [c_1, c_2] : p(c_1) > 0, p(c_3) < 0$$

$$c_3 = \frac{c_1 + c_2}{2}; p(c_3) < 0, c_3 \text{ zamenja } c_2$$

Ta postopek nadaljujemo dokler ni interval ustrezno majhen, oziroma dokler se obe meji intervala ne ujemata na določeno število decimalk. Bisekcija je lahko kar zamuden proces in zato primerna predvsem za programiranje.

Zgled

Poišči interval dolžine 0,125 na katerem leži ničla polinoma $p(x) = x^3 + x + 1$.

Najprej določimo dve celi števili med katerima zagotovo leži ničla polinoma, tako da izračunamo nekaj vrednosti.

$$p(1) = 3$$

$$p(0) = 1$$

$$p(-1) = -1$$

$$p(-2) = -9$$

Vidimo, da ničla leži nekje med 0 in 1.

$$\Rightarrow \text{začetni interval dolžine 1 } [-1, 0]; p(-1) < 0; p(0) > 0$$

$$\text{sredina } c = \frac{-1 + 0}{2} = -0,5 : p(-0,5) = 0,375 > 0;$$

$$-0,5 \text{ zamenja } 0$$

▮ drugi interval dolžine 0,5: $[-1, -0,5]$; $p(-1) < 0$; $p(-0,5) > 0$

$$\text{sredina } c_1 = \frac{-1 - 0,5}{2} = -0,75 : p(-0,75) = -0,17 < 0;$$

-0,75 zamenja -0,5

▮ tretji interval dolžine 0,25: $[-0,75, -0,5]$; $p(-0,75) < 0$; $p(-0,5) > 0$

$$\text{sredina } c_2 = -0,625 : p(-0,625) = 0,13 > 0;$$

-0,625 zamenja -0,5

▮ četrti interval dolžine 0,125: $[-0,75, -0,625]$ je interval zahtevane dolžine.

Torej ničla leži nekje med -0,75 in -0,625.

Naloga

Poišči interval dolžine 0,25 v katerem se nahaja ničla polinoma:

(a) $p(x) = x^3 - 6x + 2$ (**R:** $[0,25, 0,5]$)

(b) $p(x) = x^4 + x - 1$ (**R:** $[0,5, 0,75]$ ali $[-1,25, -1]$)

2.7 Graf polinoma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- ✎ Polinom je **zvezna funkcija**, kar pomeni, da je graf polinoma **nepretrgana krivulja**.
- ✎ **Presečišče z ordinatno osjo** je točka $(0, a_0)$, kjer je a_0 prosti člen.
- ✎ Polinom zamenja predznak samo v ničlah lihe stopnje.
- ✎ **Torej graf polinoma v ničli lihe stopnje seka abcisno os, v ničli sode stopnje pa se je samo dotakne.**
- ✎ Polinom se v neskončnosti obnaša kot njegov vodilni člen.

Risanje grafov si bomo ogledali na primerih.

2.7.1 Primer

Nariši graf polinoma $p(x) = -2x^3 + 6x - 4$.

S pomočjo Hornerjevega algoritma določimo ničle in njihove stopnje:

	-2	0	6	-4	
-1	2	2	-4		
	-2	-2	4	0	$x_1 = 1$

Ostale ničle dobimo iz:

$$-2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x_2 = -2 \text{ in } x_3 = 1$$

NIČLE:

$x_{1,2} = 1$ (ničla sode stopnje)

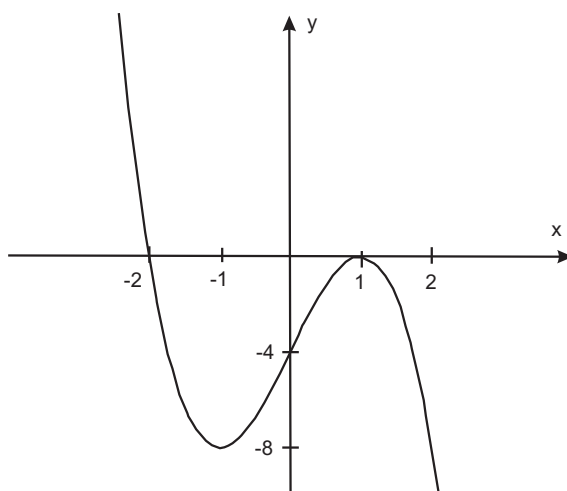
$x_3 = -2$ (ničla lihe stopnje)

Presečišče z ordinatno osjo je v točki $T(0, -4)$.

Vodilni člen: $-2x^3$; če gre $x \rightarrow -\infty \Rightarrow p(x) \rightarrow \infty$
(graf začnemo risati levo zgoraj – glej sliko 2.1)

Izračunajmo si še nekaj vrednosti:

x	$p(x)$
-1	-8
2	-8



Slika 2.1: Graf polinoma $p(x) = -2x^3 + 6x - 4$

2.7.2 Naloga

Nariši grafe naslednjih polinomov:

(a) $p(x) = x^2 - 5x + 4$

(b) $p(x) = (x - 2)^2(x + 1)(x + 3)$

(c) $p(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)(x - 2)(x + 2)$

Poglavje 3

Racionalne funkcije

3.1 Definicija racionalne funkcije

Racionalna funkcija imenujemo tisto funkcijo, ki jo lahko zapišemo kot količnik dveh polinomov:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (3.1)$$

$p(x)$ in $q(x)$ sta polinoma in $q(x)$ ne more biti ničelni polinom, ker sicer ulomek nima pomena.

Primeri racionalnih funkcij

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x^4 - x^3 - 5}{x^8 + 3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{x + 3}$$

$$\Rightarrow f(x) = 5x^2 + 6x - 7, \text{ pri čemer je } q(x) = 1$$

3.2 Graf racionalne funkcije

Definicija

Nižle racionalne funkcije so tiste vrednosti spremenljivke x za katere zavzame racionalna funkcija vrednost 0. Torej velja:

$$f(x) = 0.$$

Definicija

Poli racionalne funkcije so tiste vrednosti spremenljivke x , za katere racionalna funkcija ***ni definirana***.

Kot smo že omenili je racionalna funkcija $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ulomek. Ulomek ima vrednost 0, če je števec enak 0, in nima vrednosti, če je imenovalec enak 0.

Definicija

Nižle racionalne funkcije so ničle polinoma v števcu in poli racionalne funkcije so ničle polinoma v imenovalcu.

Primer

Določi ničle in pole funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x - 15}$.

✎ NIČLE:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$\boxed{x_{1,2} = 2}$$

✎ POLI:

$$x^2 - 2x - 15$$

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\boxed{x_1 = 5}$$

$$\boxed{x_2 = -3}$$

Definicija

Racionalna funkcija spremeni predznak v ničlah in polih lihe stopnje.

3.3 Asimptote

Pri določevanju asimptot racionalnih funkcije ločimo tri primere:

- ☞ Kadar je stopnja polinoma v števcu manjša od stopnje polinoma v imenovalcu, se racionalna funkcija v neskončnosti približuje vodoravni asimptoti z enačbo:

$$y = 1.$$

- ☞ Racionalna funkcija z enako stopnjo polinomov v števcu in imenovalcu, se v neskončnosti približuje vodoravni asimptoti z enačbo:

$$y = \frac{a_n}{b_m}.$$

a_n in b_m sta vodilna koeficienta obeh polinomov

- ☞ Racionalna funkcija, ki ima v števcu polinom večje stopnje kot v imenovalcu, se v neskončnosti približuje polinomu $k(x)$, ki ga dobimo kot količnik pri deljenju $p(x)$ in $q(x)$.

3.4 Zgledi

- ① Nariši graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$.

POLI:

Pole določimo s pomočjo imenovalca: $x = 0$. Torej se funkcija neskončno približa premici $x = 0$.

NIČLE:

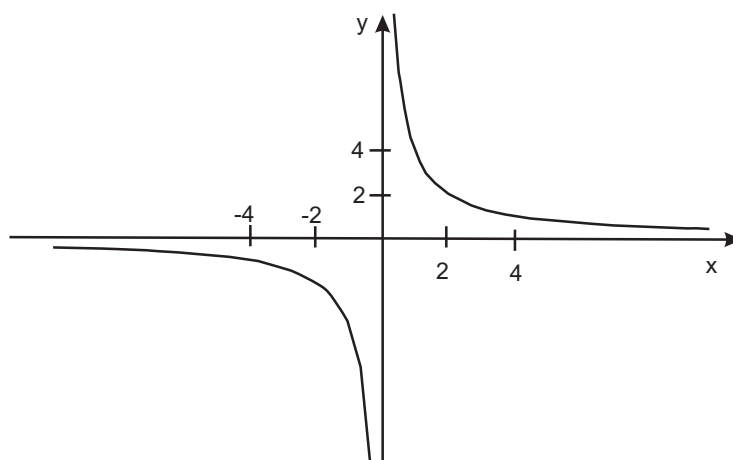
Ničel funkcija $f(x)$ nima.

ASIMPTOTA:

Ker je stopnja polinoma v imenovalcu manjša kot stopnja polinoma v števcu je asimptota $y = 0$.

SLIKA:

Glej sliko 3.1.



Slika 3.1: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

- ② Nariši graf funkcije $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

POLI:

Funkcija ima pol druge stopnje v $x = 1$. To pomeni, da funkcija ne spremeni predznaka.

NIČLE:

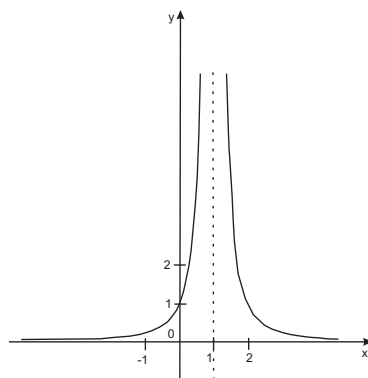
Ničel funkcija nima.

ASIMPTOTA:

Ker je stopnja polinoma v imenovalcu manjša kot stopnja polinoma v števcu je asimptota $y = 0$.

SLIKA:

Glej sliko 3.2.



Slika 3.2: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

- ③ Nariši graf funkcije $f(x) = \frac{2x-4}{-x+1}$

POLI:

Funkcija ima pol prve stopnje v $x = 1$. To pomeni, da funkcija spremeni predznak.

NIČLE:

$$2x - 4 = 0$$

$$2(x - 2) = 0$$

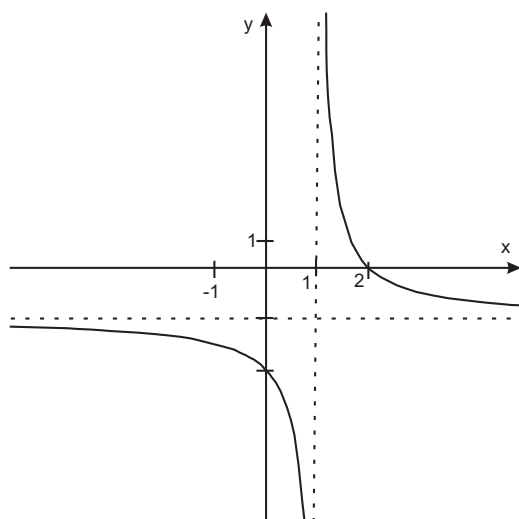
$$\boxed{x_1 = 2}$$

ASIMPTOTA:

je stopnja polinoma v imenovalcu enaka kot stopnja polinoma v števcu je vodoravna asimptota $y = \frac{2}{-1} = -2$.

SLIKA:

Glej sliko 3.3.



Slika 3.3: Graf funkcije $f(x) = \frac{2x-4}{-x+1}$

④ Nariši graf funkcije $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-2)(x+2)}$.

POLI:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

NIČLE:

$$x_1 = 1$$

ASIMPTOTA:

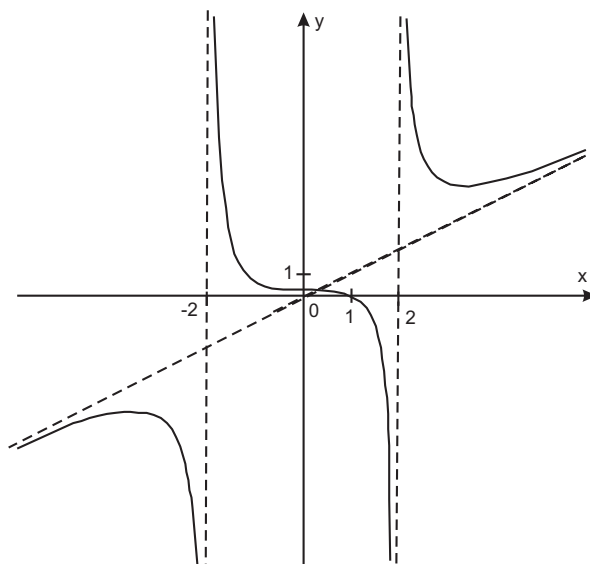
Ker je stopnja polinoma v števcu večja od stopnje polinoma v imenovalcu, jo dobimo z deljenjem:

$$(x^3 - 1) : (x^2 - 4) = x.$$

Torej je asimptota $y = x$.

SLIKA:

Glej sliko 3.4.



Slika 3.4: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$

3.5 Racionalne enačbe

Racionalne enačbe so enačbe v katerih nastopa racionalna funkcija in se dajo z osnovnimi računskimi operacijami prevesti na primer:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Rešitev dajo tisti realni x za katere velja $p(x) = 0$ in $q(x) \neq 0$.

3.5.1 Primeri

① *Reši enačbo:*

$$\frac{12x^2 - 12}{x^2 - 2x - 3} = \frac{7x}{x - 3} + \frac{5x}{x + 1}.$$

Najprej poiščemo skupne imenovalce vseh treh členov in jih prenesemo na eno stran enačaja.

$$\frac{12x^2 - 12}{(x - 3)(x + 1)} - \frac{7x}{x - 3} - \frac{5x}{x + 1} = 0$$

$$\frac{12x^2 - 12 - 7x(x + 1) - 5x(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)} = 0$$

Sedaj poiščemo ničle števca:

$$12x^2 - 12 - 7x^2 - 7x - 5x^2 + 15x = 0$$

$$8x - 12 = 0$$

$$x = \frac{12}{8}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Ker števila $\frac{3}{2}$ ni med ničlami imenovalca, je to dobra rešitev.

② Reši enačbo:

$$\frac{1}{8x - 16} + \frac{5 - x}{8x - 4x^2} = \frac{7}{8x} - \frac{x - 1}{2x(x - 2)}.$$

$$\frac{1}{8(x - 2)} + \frac{5 - x}{4x(2 - x)} = \frac{7}{8x} - \frac{x - 1}{2x(x - 2)}$$

$$\frac{x - 2(5 - x) - 7(x - 2) + 4(x - 1)}{8x(x - 2)} = 0$$

Števec:

$$\begin{aligned}x - 10 + 2x - 7x + 14 + 4x - 4 &= 0 \\0 &= 0\end{aligned}$$

Enačbo reši vsako realno število, razen $x = 0$ in $x = 2$.

③ Reši enačbo:

$$\frac{2x-1}{x-2} - \frac{x+3}{2x-1} = \frac{2x^2+2x-3}{2x^2-5x+2}.$$

$$\frac{2x-1}{x-2} - \frac{x+3}{2x-1} = \frac{2x^2+2x-3}{(2x-1)(x-2)}$$

$$\frac{(2x-1)^2 - (x+3)(x-2) - 2x^2 - 2x + 3}{(x-2)(2x-1)} = 0$$

Števec:

$$\begin{aligned}4x^2 - 4x + 1 - x^2 - 3x + 2x + 6 - 2x^2 - 2x + 3 &= 0 \\x^2 - 7x + 10 &= 0 \\(x-2)(x-5) &= 0\end{aligned}$$

$$x_1 = 2$$

$$\boxed{x_2 = 5}$$

x_1 zaradi nedefiniranosti izraza ni rešitev.

3.5.2 Naloge

Reši naslednje enačbe:

$$(a) \quad \frac{2x-5}{3x+1} = \frac{2x-6}{3x+8} \quad (\mathbf{R}: x=2)$$

$$(b) \quad \frac{x^2+9x+20}{x+3} = \frac{x^2-x-2}{x+1} \quad \left(\mathbf{R}: x = -\frac{13}{4} \right)$$

$$(c) \quad \frac{x+1}{2x-1} - \frac{11x+5}{12(2x-1)} = \frac{x-3}{4-8x} + \frac{1}{6} \quad \left(\mathbf{R}: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right)$$

$$(d) \quad \frac{x-1}{2x^2-18} - \frac{4x+1}{4x^2-36} + \frac{2}{x+3} = \frac{3}{2x-6} \quad (\mathbf{R}: \text{ni rešitev})$$

3.6 Racionalne neenačbe

Racionalne neenačbe so tiste neenačbe, ki se dajo z osnovnimi računskimi operacijami prevesti, na primer:

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0.$$

Namesto neenačaja $>$ (strogo večji od) lahko nastopa \geq (večji ali enak), $<$ (strogo manjši) ali \leq (manjši ali enak).

3.6.1 Primeri

① Reši neenačbo:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{6}{x+3} < 0.$$

Prvi korak pri reševanju je ta, da najprej damo vse člene na eno stran enačaja in jih seštejemo. V našem primeru tega ne rabimo storiti.

$$\frac{x(x+3) - 6(x-1)}{(x-1)(x+3)} < 0$$

$$\frac{x^2 + 3x - 6x + 6}{(x-1)(x+3)} < 0$$

$$\frac{x^2 - 3x + 6}{(x - 1)(x + 3)} < 0$$

V drugem koraku določimo ničle in pole.

Ničel ni, ker je izraz v števcu nerazcepen.

Poli:

$$x_1 = -3 \text{ (lihe stopnje)}$$

$$x_2 = 1 \text{ (lihe stopnje)}$$

Ker sta oba pola lihe stopnje se predznak spremeni le v -3 in 1. Zanima nas le še predznak v $x = 0$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{(x - 1)(x + 3)}$$

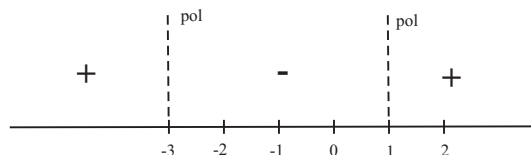
$$f(0) = \frac{6}{-1 \cdot 3} = -2$$

S kratkim računom smo ugotovili da je predznak v 0 negativen.

V četrtem koraku si narišemo kratko skico in iz nje zapišemo rešitev.

Slika

Glej sliko 3.5.



Slika 3.5: Rešitev $(-3, 1)$

Rešitev: $(-3, 1)$

② Reši neenačbo:

$$\frac{4x^2 - 8x - 24}{x^2 - 2x - 3} \geq 3.$$

$$\frac{4x^2 - 8x - 24}{x^2 - 2x - 3} \geq 3$$

$$\frac{4x^2 - 8x - 24 - 3(x^2 - 2x - 3)}{x^2 - 2x - 3} \geq 0$$

$$\frac{4x^2 - 8x - 24 - 3x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x - 3} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} \geq 0$$

$$\frac{(x - 5)(x + 3)}{(x - 3)(x + 1)} \geq 0$$

Ničle:

$$x_1 = 5 \text{ (lihe stopnje)}$$

$$x_2 = -3 \text{ (lihe stopnje)}$$

Poli:

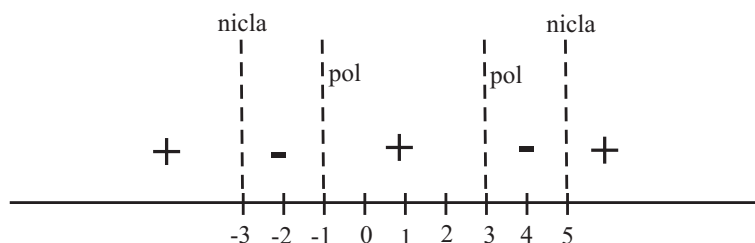
$$x_1 = 3 \text{ (lihe stopnje)}$$

$$x_2 = -1 \text{ (lihe stopnje)}$$

$$f(0) = 5 > 0$$

Slika

Glej sliko 3.6.



Slika 3.6: Rešitev $(-\infty, -3] \cup (-1, 3) \cup [5, \infty)$

Rešitev: $(-\infty, -3] \cup (-1, 3) \cup [5, \infty)$

③ Reši neenačbo:

$$\frac{x+4}{x} > -\frac{4}{x^2}.$$

$$\frac{x+4}{x} + \frac{4}{x^2} > 0$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2} > 0$$

$$\frac{(x+2)^2}{x^2} > 0$$

Ničle:

$$x_{1,2} = -2 \text{ (sode stopnje)}$$

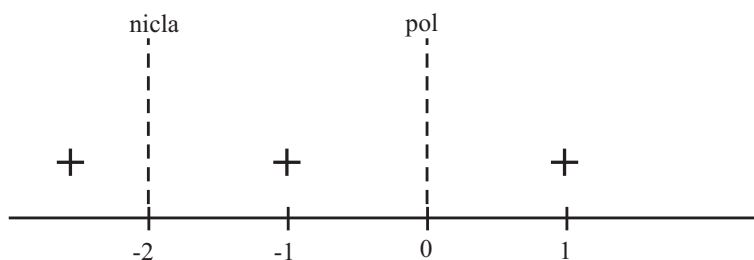
Poli:

$$x_{1,2} = 0 \text{ (sode stopnje)}$$

Predznak te funkcije je ves čas enak (pozitiven, ker imamo v števcu in imenovalcu kvadrato) pri $x = -2$ ima funkcija ničlo, pri $x = 0$ pa ni definirana.

Slika

Glej sliko 3.7.



Slika 3.7: Rešitev $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

Rešitev: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

3.6.2 Naloge

Reši naslednje neenačbe:

(a) $\frac{2-x}{x+1} < 2$ **R:** $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

(b) $\frac{3}{x-5} \geq -1$ **R:** $(-\infty, 2] \cup (5, \infty)$

(c) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x - 4} \leq 0$ **R:** $[-5, -1) \cup [2, 4)$

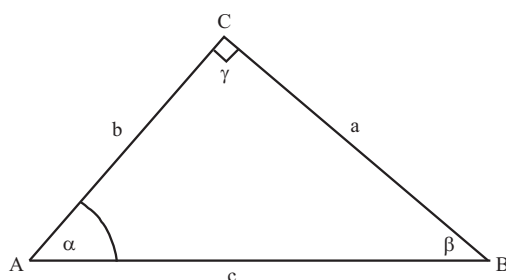
(d) $\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x - 8} > 0$ **R:** $(-\infty, -4) \cup (-1, 2) \cup (7, \infty)$

Poglavje 4

Kotne funkcije in trigonometrija

4.1 Pravokotni trikotnik

Pravokotni trikotnik je trikotnik, ki ima en notranji kot 90° . Stranica c , ki leži nasproti pravega kota se imenuje *hipotenuza*; a in b sta *kateti*. Za kot α (ob oglišču A) je a nasprotna kateta, b pa priležna kateta. Za kot β pa je nasprotna kateta b in priležna a . Glej sliko 4.1.



Slika 4.1: Pravokotni trikotnik

4.2 Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku

4.2.1 Sinus

Definicija

Sinus kota je razmerje med nasprotno kateto in hipotenuzo.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

4.2.2 Kosinus

Definicija

Kosinus kota je razmerje med priležno kateto in hipotenuzo.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

4.2.3 Tangens

Definicija

Tangens kota je razmerje med nasprotno in priležno kateto.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

4.2.4 Kotangens

Definicija

Kotangens kota je razmerje med priležno in nasprotno kateto.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$$

4.3 Primera

- ① Poišči vrednosti kotnih funkcij za oba ostra kota v pravokotnem trikotniku s podatki: $b = 24$ in $c = 25$.

Najprej s pomočjo Pitagorovega izreka poiščemo še dolžino stranice a :

$$a^2 = c^2 - b^2 = 25^2 - 24^2 = 625 - 576 = 49$$

$$a = \sqrt{49} = \underline{\underline{7}}$$

Sedaj s pomočjo definicij kotnih funkcij izračunamo njihove vrednosti:

$$\sin \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{a}{c} = \frac{7}{25}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{24}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{b}{c} = \frac{24}{25}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{7}{25}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}} = \frac{a}{b} = \frac{7}{24}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{24}{7}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{priležna kateta}}{\text{nasprotna kateta}} = \frac{b}{a} = \frac{24}{7}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} = \frac{7}{24}$$

- ② Od morja se vzpenja pot pod kotom 20° . Kako visoko nad morjem smo, če prehodimo po tej poti 500 m?

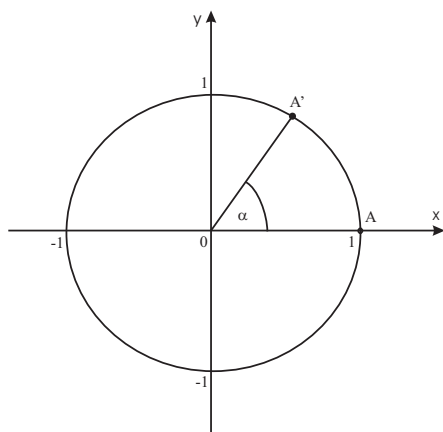
$$h = l \cdot \sin \alpha = 500 \text{ m} \cdot \sin 20^\circ = 171 \text{ m}$$

4.4 Vrednosti nekaterih kotnih funkcij

kot α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90°	1	0	∞	0

4.5 Definicija funkcij sinus in kosinus

V tem razdelku bomo skušali definirati ti funkciji za poljuben kot. Pri tem si bomo pomagali z enotsko krožnico v koordinatnem sistemu in točko $A(1,0)$ na njej zavrtimo za poljuben kot α da dobimo A' . Glej sliko 4.2.



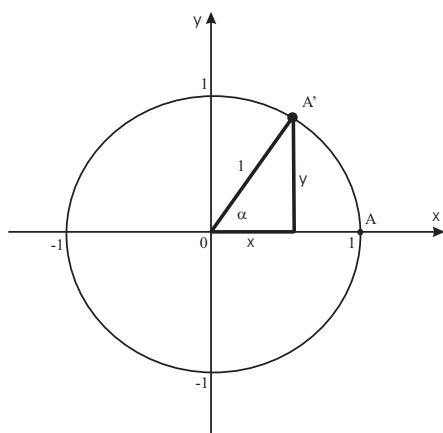
Slika 4.2: Zasuk točke A

Definicija

A' ima abciso enako $\cos \alpha$, ordinato pa $\sin \alpha$.

Sedaj preverimo, če se definiciji ujemata s tistima v pravokotnem trikotniku.

Glej sliko 4.3



Slika 4.3: Zasuk točke A

Na sliki imamo pravokotni trikotnik, v katerem sta dolžini katet obe koordinati točke A' , hipotenuza pa ima dolžino 1, predstavlja polmer enotske krožnice.

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y \quad \text{in} \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x$$

Definicija

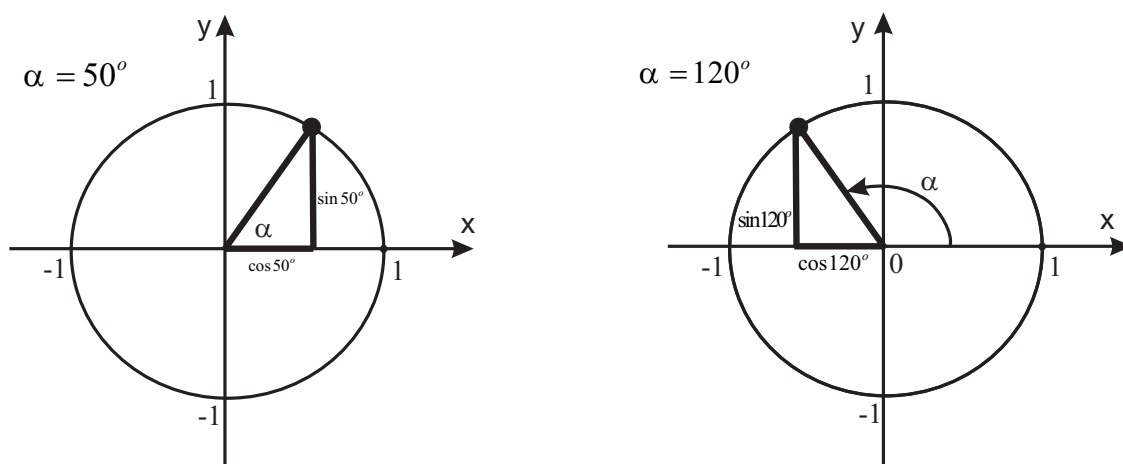
$\sin \alpha$ je druga, $\cos \alpha$ pa prva koordinata točke, ki jo dobimo, če zavrtimo $A(1, 0)$ na enotski krožnici za kot α .

Ker sta $\sin \alpha$ in $\cos \alpha$ koordinate točke na enotski krožnici, nikoli ne moreta zavzeti vrednosti, ki bi bila večja od 1 ali manjša od -1:

$$\begin{array}{l} -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \\ -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \end{array}$$

Primer

Glej sliko 4.4.



Slika 4.4: $\sin \alpha$ in $\cos \alpha$ v enotski krožnici

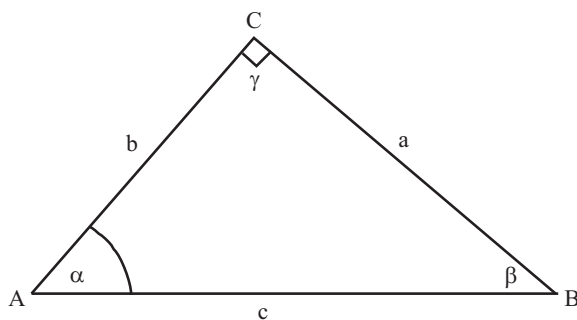
4.6 Definicija funkcij tangens in kotangens

Kotni funkciji tangens in kotangens pa definiramo kot količnik funkcij sinus in kosinus:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \quad \text{in} \quad \boxed{\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

Po krajšem premisleku ugotovimo, da se tudi ta definicija ujema s tisto v pravokotnem trikotniku.

Glej sliko 4.5.



Slika 4.5: Definicija funkcij $\operatorname{tg} \alpha$ in $\operatorname{ctg} \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$$

4.7 Vrednosti kotnih funkcij za različne kote

S pomočjo enotske krožnice poiščemo vrednosti kotnih funkcij sinus in kosinus za kote 0° , 90° , 180° in 270° . Vrednosti za funkciji tangens in kotangens za našete kote pa dobimo z deljenjem.

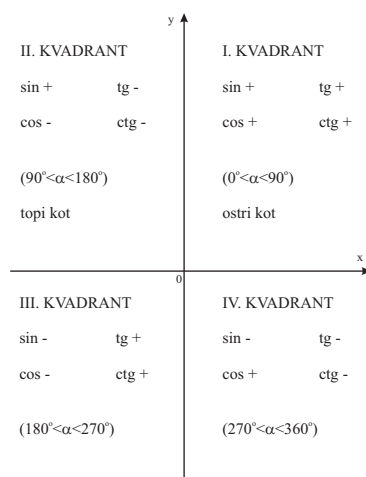
Rezultate lahko strnemo v naslednjo tabelo:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0°	0	1	0	—
90°	1	0	—	0
180°	0	-1	0	—
270°	-1	0	—	0

4.8 Predznak kotnih funkcij

Poglejmo kakšen kot zavzamejo funkcije pri določenih kotih. V ta namen razdelimo kote v štiri skupine. Če rišemo kote v koordinatnem sistemu s fiksnim krakom na pozitivnem delu abscisne osi, so v I. kvadrantu koti med 0° in 90° , v II. tisti med 90° in 180° , v III. med 180° in 270° in v IV. kvadrantu koti med 270° in 360° .

Glede na predznak koordinat točk v posameznih kvadrantih določimo predznak funkcij sinus in kosinus. Tangens in kotangens bosta potem pozitivna, kjer imata sinus in kosinus enak predznak, negativna pa tam, kjer se ti dve funkciji razlikujeta v predznaku. Glej sliko 4.6.



Slika 4.6: Predznak kotnih funkcij

4.9 Naloge

① *Poiščite vse kote med 0° in 360° za katere velja:*

(a) $\sin \alpha = 1$

(b) $\cos \beta = 0$

(c) $\cos \alpha = -1$

② *Vstavite pravilen neenačaj ($<$, $>$)*

(a) $\sin 25^\circ \square \sin 30^\circ$

(b) $\cos 20^\circ \square \cos 23^\circ$

(c) $\sin 200^\circ \square \sin 205^\circ$

③ *Izračunajte:*

(a) $\operatorname{tg} 180^\circ - 2 \cos 180^\circ + 3 \sin 90^\circ =$

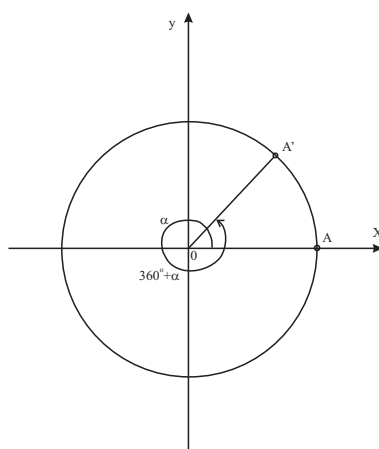
(b) $\sin 0^\circ + 3 \operatorname{ctg} 90^\circ - 4 \cos 270^\circ =$

4.10 Lastnosti kotnih funkcij in prehod na ostri kot

4.10.1 Sinus in kosinus

PERIODIČNOST

Za poljuben kot α velja: (slika 4.7.)



Slika 4.7: Periodičnost

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 360^\circ) &= \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ) &= \cos \alpha\end{aligned}$$

Če točko $A(1, 0)$ na enotski krožnici zavrtimo za kot α , pridemo v isto točko, kot če jo zavrtimo za $360^\circ + \alpha$. Pri zavrtitvi za 360° se točka A preslika sama vase.

Posplošimo

$\begin{aligned}\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \sin \alpha \\ \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \cos \alpha,\end{aligned}$

pri čemer $k \in \mathbb{Z}$.

Kotu lahko prištejemo poljuben večkratnik 360° , pa se vrednost kotne funkcije ne spremeni. Tej lastnosti kotnih funkcij pravimo *periodičnost*.

Funkciji *sinus* in *kosinus* sta *periodični* z osnovno periodo 360° ali 2π . To pomeni, da se vrednosti teh funkcij ponavljajo na vsakih 360° .

Primeri

$$\sin 400^\circ = \sin(360^\circ + 40^\circ) = \sin 40^\circ$$

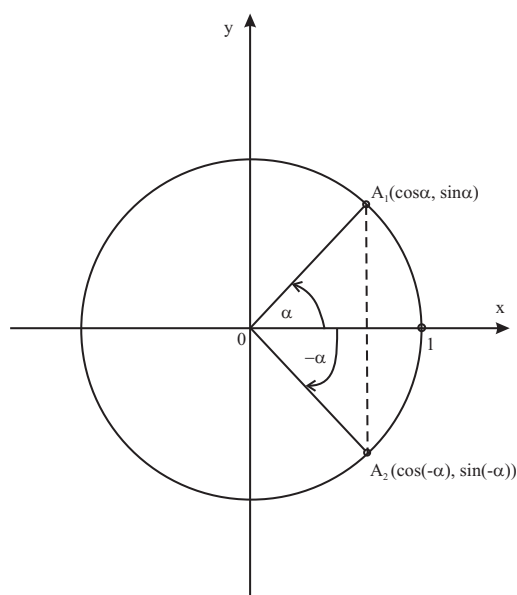
$$\cos 850^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 130^\circ) = \cos 130^\circ$$

$$\sin \frac{13\pi}{2} = \sin \left(6\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \frac{9\pi}{2} = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

SODOST IN LIHOST

V kakšni zvezi sta $\sin \alpha$ in $\sin(-\alpha)$? Glej sliko 4.8.



Slika 4.8: Sodost in lihost

Iz slike vidimo, da imata točki A_1 in A_2 enaki abscisi. To pomeni:

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos \alpha}$$

Kosinusa nasprotnih kotov sta enaka in zato je kosinus **SODA FUNKCIJA**.

Ordinati točk A_1 in A_2 pa nista povsem enaki – imata nasproten predznak.

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin \alpha}$$

Sinusa nasprotnih kotov sta nasprotna in je sinus **LIHA FUNKCIJA**.

Primeri

$$\sin(-40^\circ) = -\sin 40^\circ$$

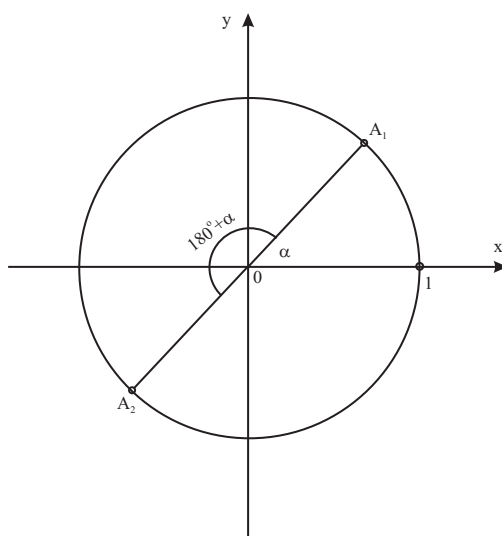
$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\sin(320^\circ) = \sin(360^\circ - 40^\circ) = \sin(-40^\circ) = -\sin 40^\circ$$

PREHOD NA OSTRI KOT

Poglejmo še v kakšni zvezi so kotne funkcije kotov α in $180^\circ + \alpha$ in $180^\circ - \alpha$.

Narišimo kota α in $180^\circ + \alpha$. Točka A_1 leži na drugem kraku kota α , A_2 pa na drugem krakum kota $180^\circ + \alpha$. Glej sliko 4.9.



Slika 4.9: Kot α in kot $180^\circ + \alpha$

Iz slike je razvidno:

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

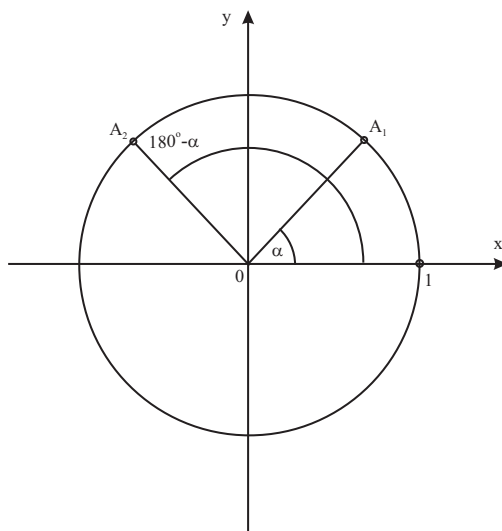
$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

Primeri

$$\sin(240^\circ) = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(210^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sedaj narišimo še kota α in $180^\circ - \alpha$. Glej sliko 4.10.



Slika 4.10: Kot α in kot $180^\circ - \alpha$

Točki, ki ju kota določata na enotski krožnici imata sedaj nasprotni abscisi in enaki ordinati, torej velja:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha\end{aligned}$$

Primeri

$$\sin(135^\circ) = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

4.10.2 Tangens in kotangens

PERIODIČNOST

Pomagali si bomo z definicijo kotnih funkcij tangens in kotangens in z ugotovitvami iz prejšnjega razdelka. Izračunajmo:

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \frac{\cos(180^\circ + \alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

Izvedeli smo, da se vrednosti funkcije tangens (kotangens) ne spremeni, če kotu prištejemo 180° . Posplošimo:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) &= \operatorname{ctg} \alpha\end{aligned}$$

Vrednosti funkcije se torej ponavljajo na vsakih 180° , zato sta obe funkciji periodični z osnovno periodo 180° ali π .

Primeri

$$\operatorname{tg} 1480^\circ = \operatorname{tg}(8 \cdot 180^\circ + 40^\circ) = \operatorname{tg} 40^\circ$$

$$\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{2} = \sin \left(3\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$$

LIHOST

Zopet si pomagamo z definicijo in upoštevamo, da je sinus liha, kosinus pa soda funkcija.

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$$

To pomeni, da sta tako tangens kot kotangens ***LIHI FUNKCIJI***.

Primeri

① Izrazi naslednje primere kot funkcijo ostrega kota:

$$(a) \operatorname{tg}(325^\circ) = \operatorname{tg}(2 \cdot 180^\circ - 35^\circ) = \operatorname{tg}(-35^\circ) = -\operatorname{tg} 35^\circ$$

$$(b) \operatorname{ctg}(-930^\circ) = -\operatorname{ctg} 930^\circ = -\operatorname{ctg}(5 \cdot 180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ$$

② Poišči vrednosti naslednjega izraza:

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(-300^\circ) - \sin 210^\circ}{\operatorname{tg} 240^\circ - \operatorname{ctg} 225^\circ} &= \\
 &= \frac{\cos(300^\circ) - \sin(210^\circ)}{\operatorname{tg}(240^\circ) - \operatorname{ctg}(225^\circ)} = \\
 &= \frac{\cos(360^\circ - 60^\circ) - \sin(180^\circ + 30^\circ)}{\operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ) - \operatorname{ctg}(180^\circ + 45^\circ)} = \\
 &= \frac{\cos(60^\circ) + \sin(30^\circ)}{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg}(45^\circ)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{3} - 1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}
 \end{aligned}$$

Naloga

① Izračunaj točne vrednosti izrazov brez pomoči žepnega računalnika.

$$(a) \frac{\cos 150^\circ - \operatorname{ctg} 210^\circ}{\operatorname{tg} 315^\circ + \sin(-225^\circ)} \quad \left(\mathbf{R} : \frac{-3\sqrt{3}}{-2 + \sqrt{2}} = \frac{3(2\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2} \right)$$

$$(b) \operatorname{ctg}(-120^\circ) + \sin(765^\circ) - \cos(-330^\circ) \quad \left(\mathbf{R} : \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6} \right)$$

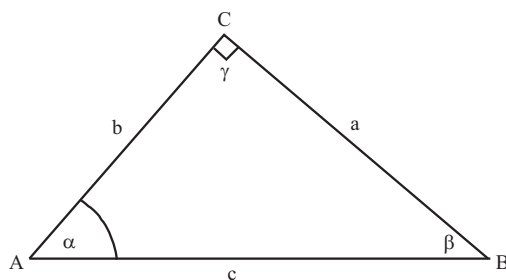
$$(c) \frac{\cos^2 1830^\circ - \sin^2 930^\circ}{\operatorname{tg} 1320^\circ} - \sin^2 2205^\circ \quad \left(\mathbf{R} : \frac{2\sqrt{3} - 3}{6} \right)$$

4.10.3 Kotne funkcije komplementarnih kotov

Definicija

Dva kota sta komplementarna takrat, kadar skupaj merita 90° .

Vemo, da sta dva ostrata kota v trikotniku komplementarna. Kakšna je zveza med kotoma? Oglejmo si sliko 4.11.



Slika 4.11: Pravokotni trikotnik

Vidimo:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \text{ ravno tako je } \cos \beta = \frac{a}{c}.$$

$\sin \alpha = \cos \beta$, ker je $\beta = 90^\circ - \alpha$, velja:

$$\boxed{\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha).} \quad (4.1)$$

Zgled

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$$

$$\sin 48^\circ = \cos 42^\circ$$

Ravno tako je:

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha). \quad (4.2)$$

Na enak način ugotovimo še:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \quad (4.3)$$

ali

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha). \quad (4.4)$$

Naloga

① Izrazi dane kotne funkcije kotov s funkcijami kotov, ki so manjši od 45° :

- (a) $\sin 64^\circ$
- (b) $\cos 69^\circ 26'$
- (c) $\operatorname{tg} 72^\circ 45'$
- (d) $\operatorname{ctg} 83^\circ 57'$

4.10.4 Zveze med kotnimi funkcijami

Poleg zvez med sinusom in kosinusom ter tangensom in kotangensom si oglejmo še nekatere, ki jih lahko sami preverite s preprostimi računi:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (4.5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (4.6)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (4.7)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (4.8)$$

Naloga

- ① Izračunaj druge kotne funkcije, če je znan $\cos \alpha = 0,4$.

4.11 Grafi kotnih funkcij

4.11.1 Sinus

Na začetku ponovimo nekaj stvari, ki jih vemo o funkciji $f(x) = \sin x$. $\sin x$ je druga koordinata točke, ki jo dobimo kot presek enotske krožnice in premičnega kraka kota α (z vrhom v izhodišču koordinatnega sistema in nepremičnim krakom na pozitivnem delu abscisne osi).

Če si ogledamo vrednosti funkcije $f(x) = \sin x$, vidimo:

- ✎ ko se x povečuje od 0 do $\frac{\pi}{2}$, se $\sin x$ povečuje od 0 do 1
- ✎ ko se x povečuje od $\frac{\pi}{2}$ do π se $\sin x$ zmanjšuje od 1 do 0
- ✎ za kote x od π do 2π se $\sin x$ zmanjša najprej od 0 do -1 (pri $\frac{3\pi}{2}$), nato pa spet narašča do 0

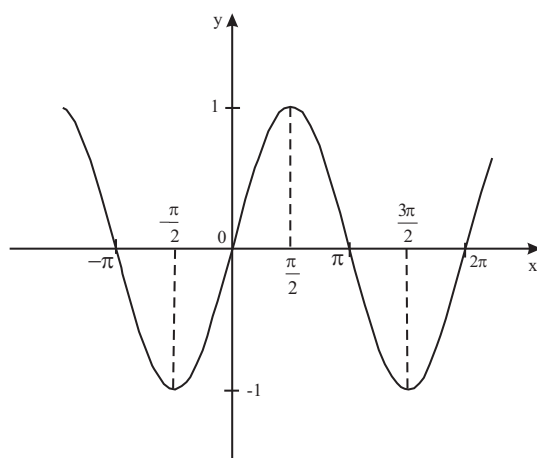
Potem se vrednosti ponavljajo, ker je sinus periodična funkcija s periodo 2π .

Graf funkcije narišemo takole: na abscisno os nanesemo kote (vadianih), na ordinatno os pa vrednosti, ki jih $\sin x$ zavzame. Za π vzamemo kar grobi približek 3,1. Pri risanju si pomagamo z enotsko krožnico in ordinate točk na njej prenašamo v koordinatni sistem. Graf funkcije natančno narišemo na intervalu od 0 do 2π , potem pa se vrednosti začnejo ponavljati. Dobimo krivuljo, ki se imenuje ***sinusoida***.

Glej sliko 4.12.

Iz grafa so lepo razvidne nekatere lastnosti funkcije $\sin x$:

- ✎ $\sin x$ je ***omejena funkcija***, največja vrednost, ki jo zavzame je 1, najmanjša pa -1.

Slika 4.12: Funkcija $f(x) = \sin x$

✍ vrednost 1 zavzame v točkah: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots$ ali na kratko:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z},$$

✍ vrednost -1 pa v točkah:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

☞ $\sin x$ ima nešteto mnogo **ničel**, to je točk v katerih graf seka abcisno os.

✍ ničle so v točkah $x = 0, \pi, 2\pi, -\pi, -2\pi, \dots$ ali:

$$x = k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

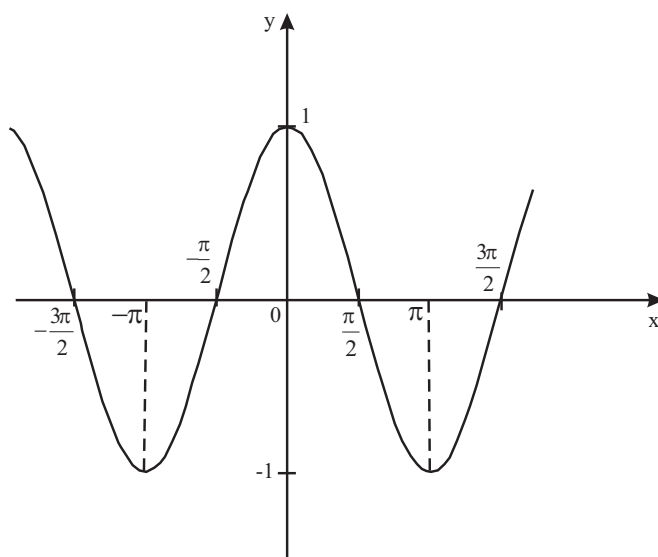
☞ Ker je $\sin x$ **liha funkcija**, je njen graf simetričen glede na izhodišče koordinatnega sistema.

4.11.2 Kosinus

$\cos x$ je abscisa točke, ki jo na enotski krožnici odreže premični krak kota x , ki ima vrh v izhodišču, nepremični krak pa na pozitivnem delu abscisne osi.

Vrednost funkcije $\cos x$ se zmanjšuje od 1 do -1, ko gre x od 0 do π , nato pa se vrednosti spet povečujejo in pri 2π ima $\cos x$ spet vrednost 1. Upoštevajmo periodičnost funkcije $\cos x$ (perioda 2π) in lahko narišemo graf.

Glej sliko 4.13.



Slika 4.13: Funkcija $f(x) = \cos x$

Iz grafa so lepo razvidne nekatere lastnosti funkcije $\cos x$:

☞ $\cos x$ je **omejena funkcija**, zavzame samo vrednosti od -1 do 1.

✍ vrednost 1 zavzame v točkah:

$x = 0, 2\pi, -2\pi, \dots$ ali:

$$x = 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

✍ vrednost -1 pa v točkah:

$$\pi + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z},$$

☞ $\cos x$ ima nešteto mnogo **ničel**, to je točk v katerih graf seka abcisno os.

✍ Ničle so v točkah $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \dots$ ali na kratko:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z},$$

☞ Graf funkcije $\cos x$ je simetričen na ordinatno os, ker je $\cos x$ **soda funkcija**.

4.11.3 Tangens

Funkcija $\operatorname{tg} x$ je definirana kot razmerje med funkcijama $\sin x$ in $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Vemo že, da je $\operatorname{tg} x$ periodična funkcija z osnovno periodo π . Zato zadošča, če raziščemo njeno obnašanje na intervalu dolžine π .

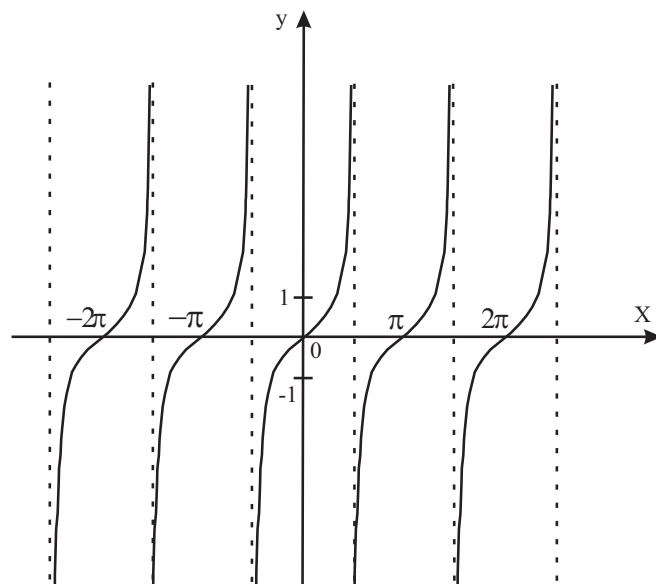
Ker je $\operatorname{tg} x$ ulomek, imamo lahko težave v točkah, kjer je imenovalec $\cos x$ enak 0. Tak ulomek namreč nima pomena. Rečemo, da funkcija $\operatorname{tg} x$ v ničlah funkcije $\cos x$ ni definirana. Vemo, da ima $\cos x$ ničle v $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$, zato tangens za te kote ni definiran in ga ne moremo izračunati.

Če si ogledamo vrednosti funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$, vidimo:

- ✍ ko se x povečuje od 0 do $\frac{\pi}{2}$, se vrednost funkcije $\operatorname{tg} x$ povečuje preko vseh meja
- ✍ ko se x zmanjšuje od 0 do $-\frac{\pi}{2}$, se vrednost funkcije $\operatorname{tg} x$ zmanjšuje preko vseh meja
- ✍ nato pa se krivulja periodično ponavlja

Sedaj lahko narišemo graf funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Glej sliko 4.14.



Slika 4.14: Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$

Iz grafa so lepo razvidne nekatere lastnosti funkcije $\operatorname{tg} x$:

- ✎ $\operatorname{tg} x$ je *neomejena funkcija*, kar pomeni, da lahko zavzame vsako realno vrednost
- ✎ ničle ima v točkah $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- ✎ v točkah $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ funkcija $\operatorname{tg} x$ ni definirana, njen graf pa se približa ***navpični asimptoti*** grafa.
- ✎ ker je $\operatorname{tg} x$ liha funkcija, je njen graf simetričen glede na izhodišče koordinatnega sistema

4.11.4 Graf funkcije $f(x) = A \cdot \sin(ax)$

① $f(x) = A \cdot \sin x$

Vse vrednosti, ki jih zavzame funkcija $f(x) = \sin x$, se pomnožijo z realnim številom A . Nova funkcija ima ničle na istih mestih kot $\sin x$, spremeni pa se ji zaloga vrednosti. $\sin x$ zavzame vrednosti od -1 do 1, $A \cdot \sin x$ pa od $-A$ do A .

Vidimo, da gre v bistvu za **RAZTEG SINUSOIDE V SMERI ORDINATNE OSI**. Rečemo lahko, da se spremeni amplituda funkcije.

② $f(x) = \sin(ax)$

Vemo, da je $\sin x$ periodična funkcija s periodo 2π . Velja $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Izračunajmo $f(x + \frac{2\pi}{a})$, tako da v $\sin(ax)$ namesto x vstavimo $x + \frac{2\pi}{a}$.

$$f(x + \frac{2\pi}{a}) = \sin\left(a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right) = \sin(ax + 2\pi) = \sin ax = f(x)$$

Če kateremukoli argumentu funkcije $f(x)$ prištejemo $\frac{2\pi}{a}$, dobimo isto vrednost.

Funkcija $\sin(ax)$ je torej periodična, njena perioda pa znaša $\frac{2\pi}{a}$. Lahko privzamemo, da je a pozitivno število. Če je $a > 1$, se perioda zmanjša, če pa je $a < 1$, se perioda poveča.

Funkcija $\sin(ax)$ še vedno zavzame najmanjšo vrednost -1 in največjo 1, torej dobimo **RAZTEG SINUSOIDE V SMERI ABCISNE OSI**.

Torej, če hočemo narisati funkcijo $f(x) = A \cdot \sin(ax)$, moramo najprej sinusoido raztegniti v smeri ordinatne osi tako, da sta mejni vrednosti $-A$ in A . Nato pa še sinusoido raztegnemo v smeri abscisne osi tako, da njena osnovna perioda znaša $\frac{2\pi}{a}$.

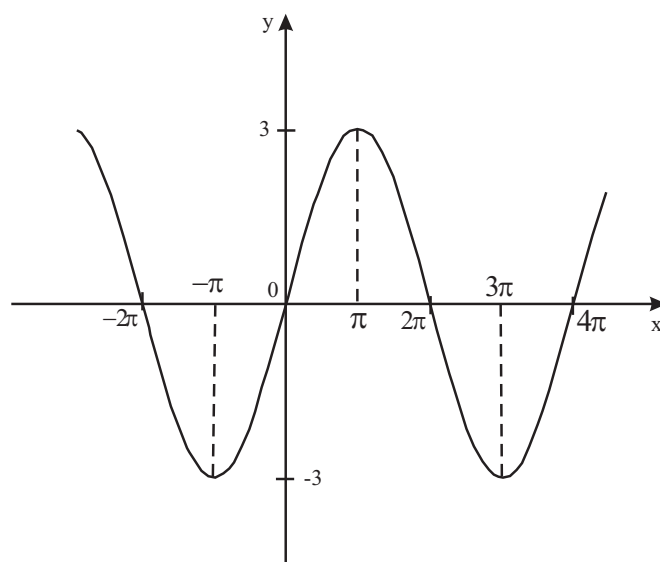
Primer

Nariši graf funkcije $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Iz funkcije lahko preberemo, da je amplituda sinusoide 3 in osnovna perioda

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

Sedaj lahko narišemo graf funkcije $f(x)$. Glej sliko 4.15.



Slika 4.15: Funkcija $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

4.11.5 Graf funkcije $f(x) = A \cdot \cos(ax)$

Za funkcijo $f(x) = A \cdot \cos(ax)$ veljajo podobne ugotovitve, zato si oglejmo naslednji primer.

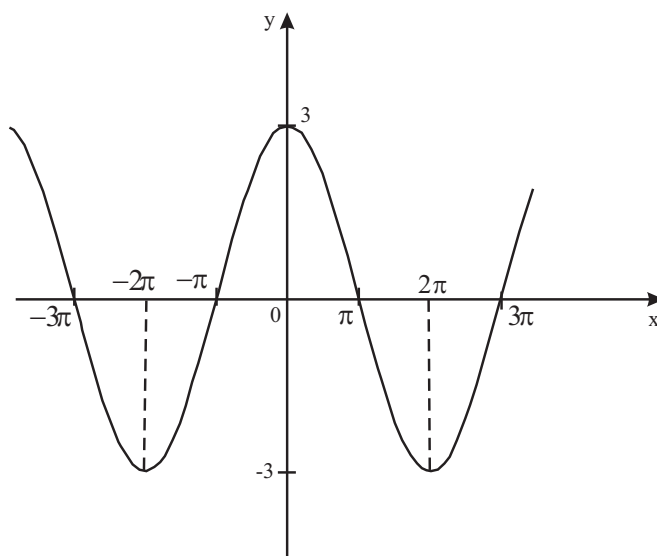
Primer

Nariši graf funkcije $f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Iz funkcije lahko preberemo, da je amplituda sinusoide 3 in osnovna perioda

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

Sedaj lahko narišemo graf funkcije $f(x)$. Glej sliko 4.16.



Slika 4.16: Funkcija $f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

4.12 Adicijski izreki in posledice

Zapišimo nekaj izrekov, ki nam povedo, kako se izračuna sinus, kosinus ali tangens vsote in razlike dveh kotov. Za funkcijo kotangens teh izrekov ne bomo navajali, ker je le-ta tesno povezana s funkcijo tangens.

4.12.1 Adicijski izreki

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.9)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.10)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.11)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.12)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (4.13)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (4.14)$$

4.12.2 Uporaba adicijskih izrekov

① *Izračunaj $\sin 75^\circ$.*

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

② *Dokaži zvezo* $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin x = 1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = \cos x$$

4.12.3 Dvojni in polovični koti

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (4.15)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (4.16)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (4.17)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (4.18)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (4.19)$$

Primer

① *Izračunaj* $\operatorname{tg} 120^\circ$, $\sin 22,5^\circ$.

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(2 \cdot 60^\circ) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

$$\sin 22,5^\circ = \sin \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

② Poenostavi izraz $(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2$.

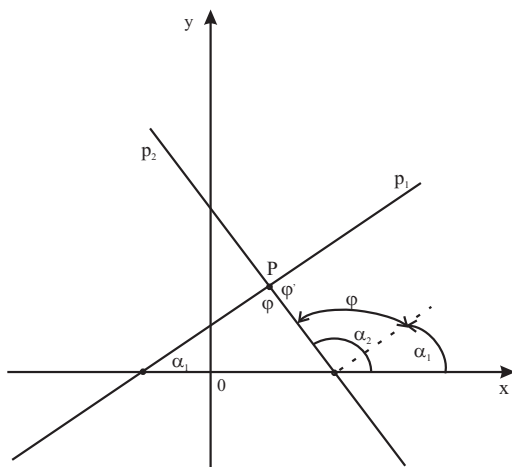
$$\begin{aligned} & (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2 = \\ & = \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1 \end{aligned}$$

4.13 Kot med premicama

Na sliki 4.17 vidimo, da je kot φ med premicama enak razliki kotov α_2 in α_1 , za katera sta premici naklonjeni proti osi x :

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$$



Slika 4.17: Kot med premicama

Dogovorimo se, da bomo vselej računali ostri kot ($\varphi < 90^\circ$) med premicama. Večji kot $\varphi' > 90^\circ$ je suplementaren ($\varphi + \varphi' = 180^\circ$), njegov tangens je negativen, po absolutni vrednosti pa je enak tangensu kota φ . V obrazcu zato uporabimo absolutno vrednost:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right| \quad (4.20)$$

Takoj najdemo še pogoj za vzporedne in pravokotne premice. Med vzporednicami je kot 0° , zato je:

$$\varphi = 0^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} = 0 \Rightarrow k_2 - k_1 = 0 \Rightarrow k_2 = k_1$$

Pogoj za vzporednost sedaj lahko zapišemo v obliki:

$$p_2 \parallel p_1 \Leftrightarrow \boxed{k_2 = k_1} \quad (4.21)$$

Na podoben način izpeljemo pogoj za pravokotnost premic:

$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \infty \Rightarrow \frac{(k_2 - k_1)}{1 + k_2 \cdot k_1} = \infty \Rightarrow 1 + k_2 \cdot k_1 = 0 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Pogoj sedaj zapišemo v obliki:

$$p_2 \perp p_1 \Leftrightarrow \boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}} \quad (4.22)$$

4.13.1 Primer

① Izračunaj kot med premicama $4x + 3y - 2 = 0$ in $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$.

$$4x + 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \rightarrow k_1 = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x - 2 \rightarrow k_2 = \frac{2}{5}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right| = \left| \frac{\frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right)} \right| = \left| \frac{6 + 20}{15 - 8} \right| = \frac{26}{7}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{26}{7} \right) = 74,9315118^\circ = 74^\circ 55' 53''$$

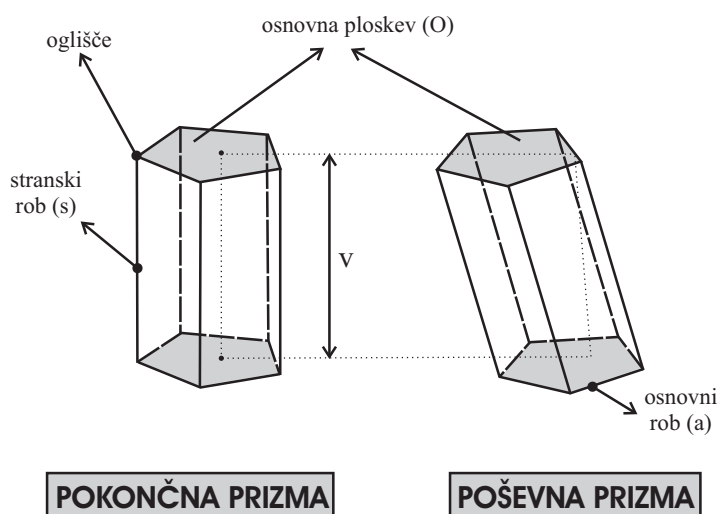
Poglavje 5

Površine in prostornine

5.1 Prizma

Definicija

Prizma je je oglato telo, ki ga omejujeta dva vzporedna skladna n – kotnika in n paralelogramov.



Vzporedna n – kotnika sta **osnovni ploskvi** prizme. Z njima so skladni vsi vzporedni preseki prizme. **Plašč** prizme sestavlja n paralelogramov.

Osnovni robovi prizme so stranice osnovne ploskve. Drugi robovi prizme so **stranski robovi**. Vsi stranski robovi prizme so med seboj vzporedni in enako dolgi.

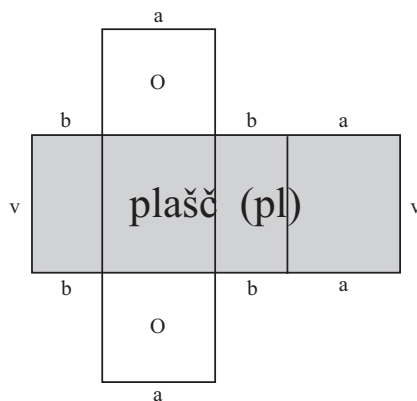
Višina prizme je razdalja med ravninama obeh osnovnih ploskev prizme.

Ločimo **pokončne** in **poševne** prizme. Stranski robovi pokončnih prizem so *pravokotni* na osnovno ploskev. Pri poševnih prizmah pa so stranski robovi glede na osnovno ploskev *poševni*.

Glede na število osnovnih robov osnovne ploskve ločimo prizme na *tristrane*, *štiri-strane* in *več strane*.

Če je osnovna ploskev pravilni večkotnik, je pokončna prizma **pravilna**. Če ima prizma vse robove enako dolge, je **enakorobna**. Taka je na primer kocka.

5.1.1 Površina prizme



Slika 5.1: Plašč prizme

Površina prizme je vsota ploščin vseh mejnih ploskev. Ker prizmo omejujeta dve osnovni ploskvi in stranske ploskve, ki tvorijo plašč, lahko zapišemo:

$$\boxed{P = 2O + pl} \quad (5.1)$$

P – površina prizme

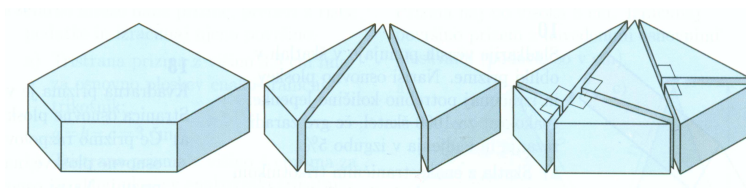
O – ploščina osnovne ploskve

pl – površina plašča

5.1.2 Prostornina prizme

Prostornino kvadra $V = a \cdot b \cdot c$, pokončne štiristrane prizme s pravokotnikom kot osnovno ploskvijo, že poznamo. Pri tem je $a \cdot b$ ploščina osnovne ploskve in c višina kvadra. Kratko lahko zapišemo $V = O \cdot v$.

Upoštevajmo, da lahko pravokotnik razdelimo na dva skladna pravokotna trikotnika. Zato tudi vsako tristrano prizmo s pravokotnim trikotnikom kot osnovno ploskvijo lahko obravnavamo kot polovico kvadra. Tudi večstrane prizme lahko sestavimo iz prizem, ki imajo za osnovno ploskev pravokotnik.



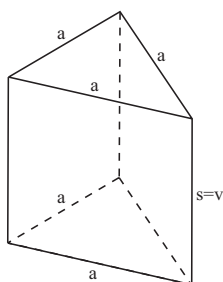
Prostornino prizme torej izračunamo tako, da ploščino osnovne ploskve pomnožimo z višino:

$$\boxed{V = O \cdot v} \quad (5.2)$$

5.1.3 Zgledi

Površina prizme

- ① Izračunaj površino pravilne tristrane prizme, če meri osnovni rob $a = 1\text{ m}$ in višina $v = 8\text{ m}$.



$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; pl = 3av$$

$$P = 2O + pl = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3av = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3av = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 1 \cdot 8 = \underline{\underline{24,87\text{ m}^2}}$$

Površina je $24,87\text{ m}^2$.

- ② Osnovna ploskev pokončne prizme je trikotnik ($a = 7 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$), višina pa $v = 10 \text{ cm}$. Izračunaj površino.

$$\text{Ploščina poljubnega trikotnika: } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}; s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$P = 2O + pl = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} + (a+b+c)v$$

$$P = 2 \cdot \sqrt{8 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3} + 16 \cdot 10$$

$$P = 19,6 + 160 = \underline{\underline{179,6 \text{ cm}^2}}$$

Površina je $179,6 \text{ cm}^2$.

- ③ Izračunaj površino pravilne šeststrane prizme, če meri rob $a = 12 \text{ cm}$ in višina $v = 10 \text{ cm}$.

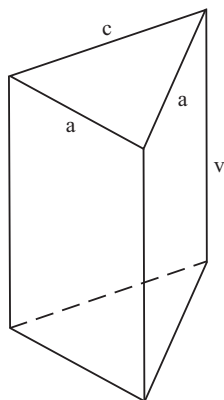
$$P = 3 \cdot a^2 \sqrt{3} + 6av$$

$$P = 3 \cdot 144 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot 12 \cdot 10 = 748,2 + 720 = \underline{\underline{1\,468 \text{ cm}^2}}$$

Površina je $1\,468 \text{ cm}^2$.

Prostornina prizme

- ① Izračunaj prostornino 9 cm visoke prizme, ki ima za osnovno ploskev enokrak trikotnik z osnovnico $c = 32 \text{ cm}$ in krakom $a = 34 \text{ cm}$.

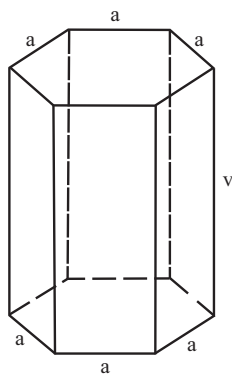


$$V = S \cdot v = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}v$$

$$V = \sqrt{50 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 18} \cdot 9 = 480 \cdot 9 = \underline{\underline{4\,320 \text{ cm}^3}}$$

Prostornina je $4\,320 \text{ cm}^3$.

- ② Osnovni rob 11 cm visoke pravilne šeststrane prizme meri $13,74 \text{ cm}^2$. Izračunaj prostornino prizme.



$$V = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot v$$

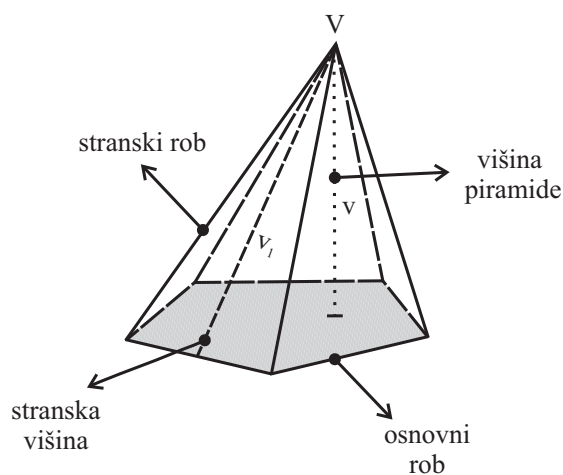
$$V = 6 \cdot \frac{13,74^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 11$$

$$\underline{\underline{V = 898 \text{ cm}^3.}}$$

5.2 Piramida

Definicija

Piramida je oglato telo, ki ga omejujejo n – kotnik in n trikotnikov, ki se stikajo v skupni točki – vrhu, če je $n \geq 3$.

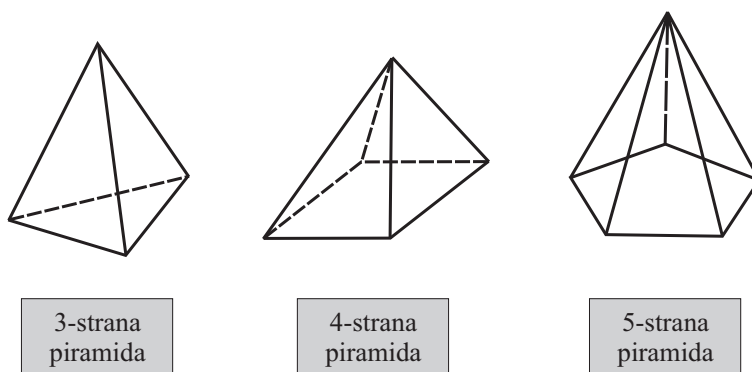


Osnovna ploskev piramide je n – kotnik. Plašč piramide sestavlja n stranskih ploskev, ki so trikotniki. Teh je toliko, kolikor ima osnovna ploskev stranic.

Stranske ploskve se sekajo v **stranskih robovih**, vsi stranski robovi pa v **vrhu piramide**. Presečišča stranskih ploskev z osnovno ploskvijo so **osnovni robovi**. To so stranice osnovne ploskve.

Višina piramide (v) je razdalja vrha piramide V od osnovne ploskve. Stranske višine (v_s) so višine trikotnikov plašča. To so pravokotnice z vrha piramide na osnovni rob stranske ploskve.

Po številu robov osnovne ploskve ločimo tristrane, štiristrane, ..., n – strane piramide.



Če so vsi stranski robovi piramide med seboj enaki in pade višina v središče njene osnovne ploskve, je piramida **pokončna**, sicer je **poševna**.

Če je osnovna ploskev pokončne piramide pravilni n – kotnik, je piramida **pravilna**. Če so vsi stranski robovi in vsi osnovni robovi piramide enako dolgi, je piramida **enakorobna**.

5.2.1 Površina piramide

Površina piramide je enaka vsoti ploščine osnovne ploskve (O) in plašča (pl) :

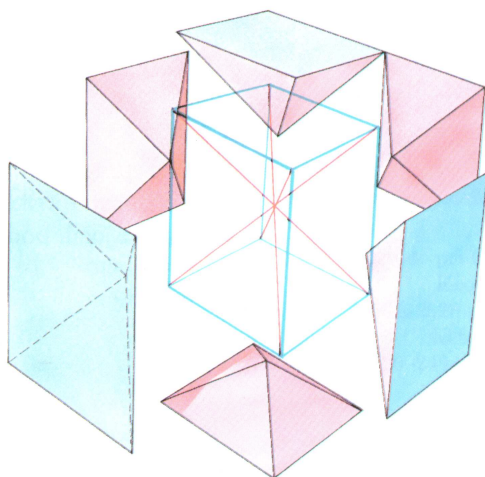
$$\boxed{P = O + pl} \quad (5.3)$$

Če je to pravilna n – strana piramida lahko enačbo 6.3 zapišemo v naslednji obliki:

$$P = O + n \cdot \frac{a \cdot v_s}{2} \quad (5.4)$$

5.2.2 Prostornina piramide

Kocko z robom a lahko razrežemo na šest piramid. Te imajo s kocko enake osnovne ploskve, za višino pa polovično višino kockinega roba.



Prostornina kocke je tako enaka vsoti prostornini vseh piramid skupaj: $V_K = 6V_P$.

Zato prostornina ene same piramide meri šestino prostornine kocke: $V_P = \frac{1}{6}a^3$. S preoblikovanjem desne strani enačbe

$$\frac{1}{6}a^3 = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2}$$

ugotovimo:

- ✎ prostornina ene piramide je enaka tretjini prostornine prizme, ki ima s kocko enako osnovno ploskev a^2 , za višino pa polovično dolžino njenega roba $\frac{a}{2}$.

Razmišljanje posplošimo:

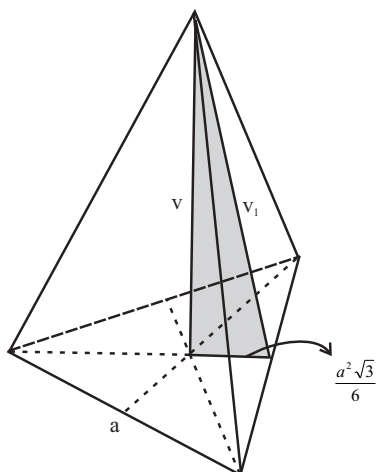
Ker meri prostornina prizme $V_K = O \cdot v$, meri potem prostornina piramide, ki ima s prizmo enako osnovno ploskev in enako višino $V_P = \frac{1}{3}O \cdot v$.

Pokazati se da, da velja obrazec za računanje prostornine piramid tudi za piramide s poljubno osnovno ploskvijo:

$$\boxed{V_P = \frac{1}{3}O \cdot v} \quad (5.5)$$

5.2.3 Zgledi

- ① Kolikšni sta površina in prostornina tristrane piramide, ki ima osnovni rob $a = 12\text{ cm}$, višina pa je 6 cm ?



Polmer kroga, ki ga včrtamo enakostraničnemu trikotniku je $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

- ☞ Če hočemo izračunati površino piramide, moramo najprej izračunati višino stranske ploskve (v_s) po Pitagorovem izreku:

$$v_s^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = v^2 + \frac{a^2 \cdot 3}{36} = v^2 + \frac{a^2}{12} = 36 + \frac{144}{12} = 36 + 12 = 48$$

$$v_s = \sqrt{48}\text{ cm} = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

Sedaj lahko izračunamo površino:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3av_s}{2} = \frac{144\sqrt{3}}{4} + \frac{3 \cdot 12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} + 72\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$$

$$P = \underline{\underline{187,1\text{ cm}^2}}$$

Površina piramide je $187,1\text{ cm}^2$.

☞ Prostornina je:

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3} \cdot v}{4 \cdot 3} = \frac{a^2 v \sqrt{3}}{12} = \frac{144 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{12} = 72\sqrt{3} = \underline{\underline{124,7 \text{ cm}^3}}$$

Prostornina piramide je $124,7 \text{ cm}^3$.

- ② Izračunaj površino in prostornino pravilne štiristrane piramide, če meri plašč $pl = 23,2 \text{ cm}^2$, stranska višina v_s pa $2,9 \text{ cm}$.

☞ Iz površine plašča izračunamo osnovni rob.

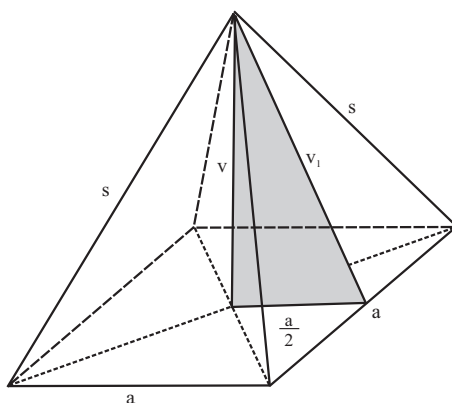
$$pl = \frac{4 \cdot av_s}{2} = 2av_s \Rightarrow a = \frac{pl}{2v_s} = \frac{23,2}{2 \cdot 2,9} = 4 \text{ cm}$$

Površina piramide je

$$P = O + pl = a^2 + pl = 16 \text{ cm}^2 + 23,2 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{39,2 \text{ cm}^2}}$$

Površina piramide je $39,2 \text{ cm}^2$.

☞ Za računanje prostornine potrebujemo telesno višino (v), ki jo izračunamo po Pitagorovem izreku



$$v^2 = v_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2,9^2 - 2^2 = 8,41 - 4 = 4,41 \text{ cm}^2$$

$$v = \sqrt{4,41 \text{ cm}^2} = 2,1 \text{ cm}$$

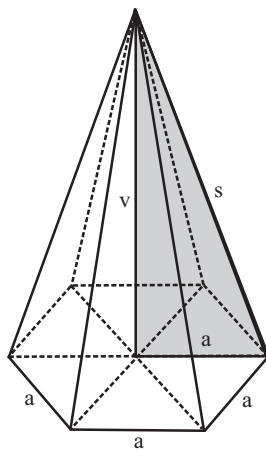
Volumen piramide je

$$V = \frac{Ov}{3} = \frac{a^2 v}{3} = \underline{\underline{11,2 \text{ cm}^3}}$$

Prostornina piramide je $11,2 \text{ cm}^3$.

- ③ *Kolikšno prostornino ima pravilna šeststrana piramida, če meri osnovni rob $a = 11 \text{ cm}$ in stranski rob $s = 13 \text{ cm}$.*

Za računanje prostornine potrebujemo telesno višino (v), ki jo izračunamo po Pitagorovem izreku.



$$v^2 = s^2 - a^2 = 169 - 121 = 48 \text{ cm}^2 \Rightarrow v = \sqrt{48 \text{ cm}^2} = 4\sqrt{3} = 6,93 \text{ cm}$$

Prostornina

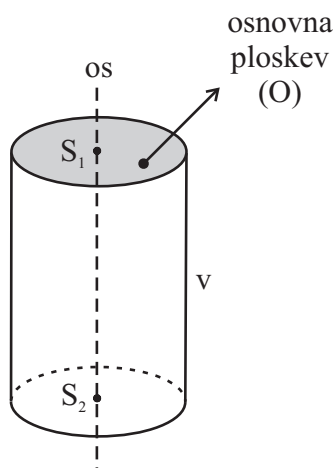
$$V = \frac{Ov}{3} = \frac{6a^2\sqrt{3} \cdot v}{4 \cdot 3} = \frac{a^2 v \sqrt{3}}{2} = \frac{121 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 121 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{\underline{726 \text{ cm}^3}}$$

Prostornina piramide je 726 cm^3 .

5.3 Valj

Definicija

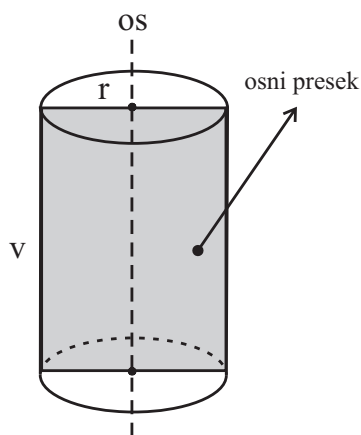
Valj je telo, omejeno z dvema skladnima in vzporednima krogoma in eno krivo ploskvijo. Kroga imenujemo **osnovni ploskvi valja**. Krivo ploskev imenujemo **plašč**.



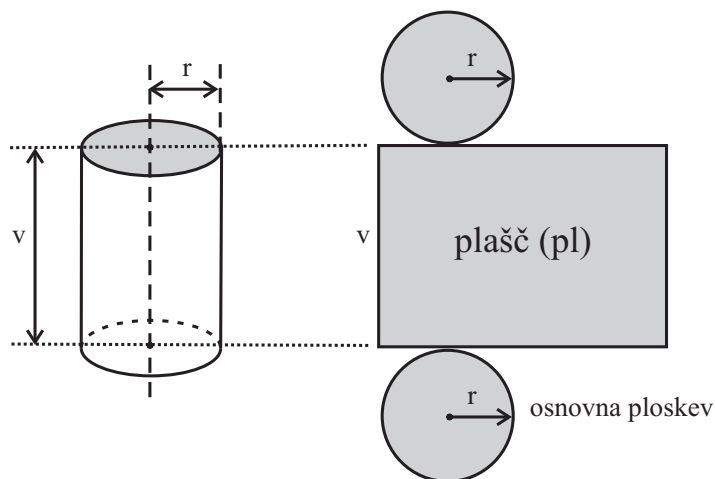
Os valja je premica skozi središči osnovnih ploskev. **Višina valja** v je razdalja med osnovnima ploskvama. **Stranica valja** je daljica na plašču valja, vzporedna z osjo (s) in s krajiščema na osnovni ploskvi.

Valj je **pokončen**, če je dolžina stranice enaka dolžini višine $s = v$, sicer je poševen. Valj je **enakostraničen**, če je njegova višina enaka premeru osnovne ploskve: $v = 2r$.

Če valj presekamo z ravnino, ki gre skozi njegovo os, dobimo **osni presek valja**. Značilni lik osnega preseka je pri pokončnem valju pravokotnik, pri enakostraničnem pa kvadrat.



5.3.1 Površina valja



Površina pokončnega valja je vsota ploščin dveh osnih ploskev in plašča:

$$P = 2O + pl$$

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$

$$\boxed{P = 2\pi r(r + v)} \quad (5.6)$$

5.3.2 Prostornina valja

Če upoštevamo dejstvo, da imamo lahko valj za prizmo z nešteto stranicami, lahko njegovo prostornino izračunamo kar po obrazcu za prostornino kvadra $V = O \cdot v$.

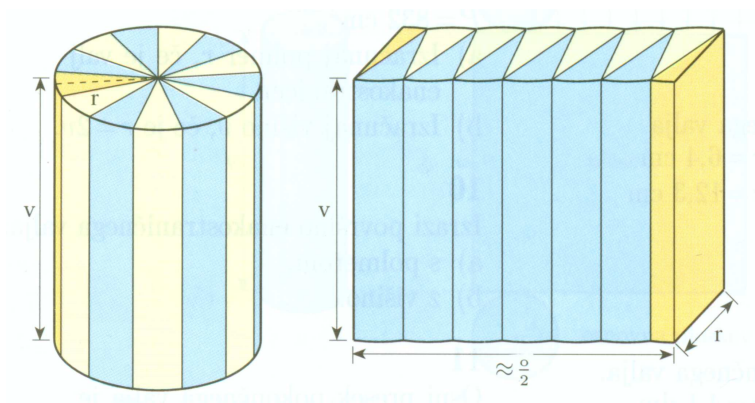
Upoštevamo še, da je osnovna ploskev valja krog s ploščino πr^2 .

Prostornina valja je enaka produktu ploščine osnovne ploskve in višine valja:

$$\boxed{V = \pi r^2 v.} \quad (5.7)$$

S preoblikovanjem enačbe preverimo, ali smo sklepali pravilno.

$$V = \pi r^2 v$$



$$V = \frac{2\pi r}{2} \cdot r \cdot v$$

$$V = \frac{o}{2} \cdot r \cdot v$$

Ugotovili smo: prostornina telesa je enaka prostornini kvadra z robovi $a = \frac{o}{2}$, $b = r$ in $v = v$. Sklepali smo pravilno.

5.3.3 Zgledi

- ① *Koliko drži lonec in koliko dm^2 pločevine vsebuje, če je premer 20 cm, višina pa 18 cm.*

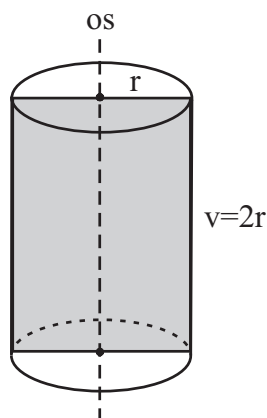
$$\Rightarrow V = \pi r^2 v = \pi \cdot 100 \cdot 18 = 5\,655\,cm^3 = 5,6551\,dm^3 = 5,6551\,l$$

\Rightarrow Pri površini ne štejemo ene ploskve.

$$P = \pi r^2 + 2\pi r v = \pi \cdot 100 + 2\pi \cdot 10 \cdot 18 = 1\,445\,cm^2$$

- ② Izračunaj polmer osnovne ploskve enakostraničnega valja s površino $24\pi \text{ cm}^2$.

Najprej izrazimo obrazec za izračun površine enakostraničnega valja.



$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r \cdot 2r = 2\pi r^2 + 4\pi r^2$$

$$\boxed{P = 6\pi r^2}$$

Iz površine enakostraničnega valja izrazimo polmer osnovne ploskve.

$$P = 6\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$$

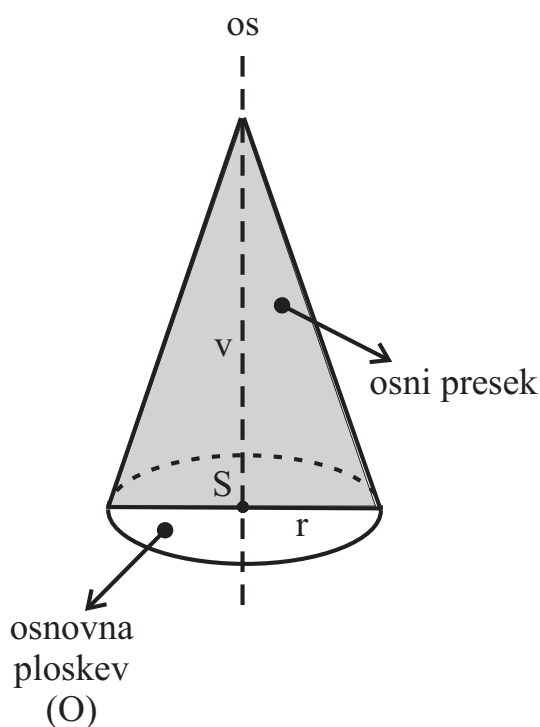
$$r = \sqrt{\frac{24\pi}{6\pi}} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2 \text{ cm}}}$$

Polmer meri 2 cm .

5.4 Stožec

Definicija

Stožec je okroglo telo, omejeno s krogom in krivo ploskvijo. Krog je osnovna ploskev stožca, kriva ploskev pa je njegov plašč.



Stranica stožca (s) je daljica, ki veže vrh stožca s poljubno točko na krožnici. **Višina stožca** (v) je razdalja vrha stožca od osnovne ploskve. **Os stožca** (p) je premica skozi vrh stožca in središče osnovne ploskve

Stožec je **pokončen**, če je njegova os pravokotna na ravnino osnovne ploskve, sicer je **poševen**. Stranice poševnega stožca imajo enake dolžine. Če je stranica stožca enaka premeru osnovne ploskve, je stožec **enakostraničen**.

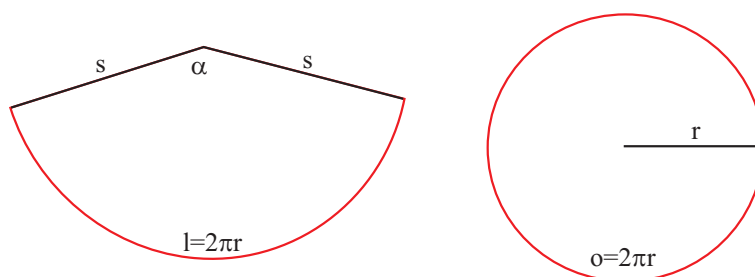
Osni presek stožca dobimo, če stožec presekamo z ravnino, ki gre skozi njegovo os. Osni presek pokončnega stožca je **enakokraki trikotnik**. Če je stožec enakostraničen, potem je osni presek **enakostranični trikotnik**.

5.4.1 Površina stožca

Površino stožca izračunamo po naslednji enačbi:

$$P = O + pl \quad (5.8)$$

Če razvijemo plašč pokončnega stožca v ravnino, dobimo *krožni izsek*. Njegov polmer je enak stranici s , njegov lok l pa obsegu osnovne ploskve. Zato je plašč pokončnega stožca kar enak ploščini krožnega izseka – glej sliko 5.2:



Slika 5.2: Plašč stožca

$$pl = \frac{\pi s^2 \alpha}{360^\circ}$$

Preoblikujemo desno stran enačbe in upoštevajmo enačbo za dolžino loka krožnega izseka

$$l = \frac{\pi s \alpha}{180^\circ}$$

in že sledi

$$pl = \frac{\pi s \alpha}{180^\circ} \cdot \frac{s}{2}$$

$$pl = 2\pi r \cdot \frac{s}{2}$$

$$pl = \pi r s$$

Ploščina plašča pokončnega stožca:

$$pl = \pi r s.$$

Površina pokončnega stožca:

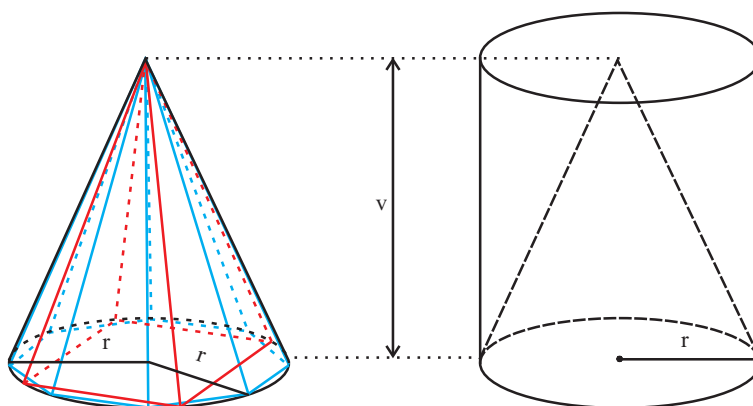
$$P = O + pl$$

$$P = \pi r^2 + \pi r s$$

$$\boxed{P = \pi r(r + s)} \quad (5.9)$$

5.4.2 Prostornina stožca

Prostornino stožca določimo tako, da mu vrišemo piramido z enako višino. Ob naraščajočem številu stranic osnovnega večkotnika se piramida vse bolj prilega stožcu.



Vemo že, da je prostornina piramide enaka tretjini prostornine prizme z enako osnovno ploskvijo in enako višino; enako velja tudi za prostornino stožca v razmerju s prostornino valja. Prostornina stožca je enaka tretjini prostornine valja:

$$V_S = \frac{1}{3}V_V$$

$$V_S = \frac{1}{3}O \cdot v$$

$$\boxed{V_S = \frac{1}{3}\pi r^2 v} \quad (5.10)$$

5.4.3 Zgledi

- ① Izračunaj površino pokončnega stožca, če meri polmer osnovne ploskve 14 cm in stranica $s = 19\text{ cm}$.

$$P = \pi r(r + s)$$

$$P = 14\pi(14 + 19) = 426\pi = \underline{\underline{1451\text{ cm}^2}}$$

- ② Senena kopica ima obliko stožca s stranico $s = 6,5\text{ m}$ in premerom $d = 11,2\text{ m}$. Kolikšna je prostornina stožca?

Za računanje prostornine rabimo višino, ki jo izračunamo po Pitagorovem izreku:

$$v^2 = s^2 - r^2$$

$$v^2 = 6,5^2 - 5,6^2 = 10,89\text{ m}^2$$

$$v = \sqrt{10,89\text{ m}^2} = 3,3\text{ m}$$

$$v = 3,3\text{ m}$$

Prostornina:

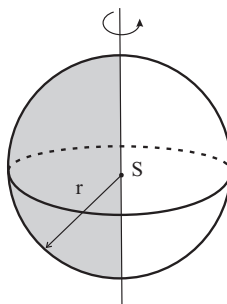
$$V = \frac{\pi r^2 v}{3} = \frac{\pi \cdot 31,36 \cdot 3,3}{3} = 108,4\text{ cm}^3$$

$$\underline{\underline{V = 108,4\text{ m}^3}}$$

5.5 Krogla

Definicija

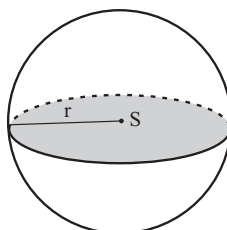
Če polkrog zavrtimo za polni kot okoli premera, dobimo kroglo.



Krogla je geometrijsko telo, omejeno s krogelno ploskvijo, ki ji rečemo *sfera*.

Polmer krogle je razdalja med središčem krogle in poljubno točko sfere. Vsaka točka sfere je od središča krogle enako oddaljena.

Preseki krogle z ravninami so krogi.



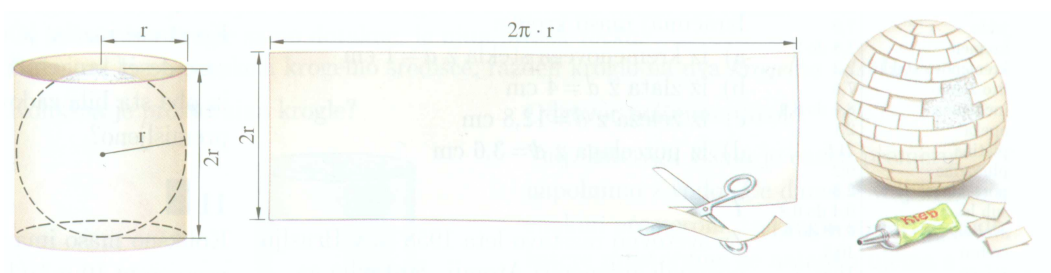
Slika 5.3: Presek krogle

5.5.1 Površina krogle

Množica vseh točk, ki so od središča O oddaljene za r , je **površje krogle**. Velikost površja je površina krogle, ki jo izračunamo po enačbi:

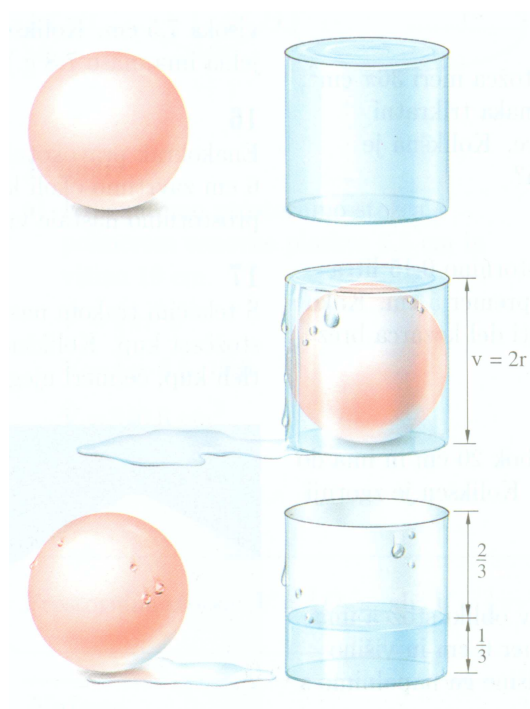
$$\boxed{P = 4\pi r^2} \quad (5.11)$$

Do te enačbe lahko pridemo tako, da kroglo ovijemo z listom papirja, ki ima obliko valja z enakim polmerom, kot je polmer krogle.



5.5.2 Prostornina krogle

Valj, katerega višina je enaka premeru, napolnimo z vodo. Če damo v valj kroglo z enakim premerom, ta krogla spodrine vodo, katere prostornina se natanko ujema s prostornino krogle.



Poskus pokaže, da je prostornina krogle enaka dvema tretjinama prostornine enakostraničnega valja:

$$V_K = \frac{2}{3}V_V$$

$$V_K = \frac{2}{3}\pi r^2 v$$

Valj je enakostraničen, $v = 2r$, zato sledi:

$$V_K = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot 2r$$

Prostornina krogle:

$$\boxed{V_K = \frac{4}{3}\pi r^3} \quad (5.12)$$

5.5.3 Zgledi

① *Izračunaj površino in prostornino krogle s polmerom $r = 6 \text{ cm}$.*

$$\P P = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 36 = 144\pi = 452,4 \text{ cm}^2$$

$$\P V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 216}{3} = 288\pi = 904,8 \text{ cm}^3$$

② *Izračunaj polmer krogle s površino $P = \pi \text{ cm}^2$.*

$$P = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{P}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{P}{4\pi}}$$

$$r = \sqrt{\frac{\pi}{4\pi}} = \frac{1}{2} \text{ cm}$$

5.6 Vaje za utrjevanje

- ① Izračunaj površino in prostornino pokončne 15 cm visoke pokončne prizme, ki ima za osnovno ploskev trikotnik s stranicami $a = 20\text{ cm}$, $b = 11\text{ cm}$ in $c = 13\text{ cm}$.

REŠITEV:

- Osnovna ploskev:

Po Heronovem obrazcu:

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{20\text{ cm} + 11\text{ cm} + 13\text{ cm}}{2} = 22\text{ cm}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{22\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} \cdot 11\text{ cm} \cdot 9\text{ cm}} = \sqrt{4356\text{ cm}^4}$$

$$S = 66\text{ cm}^2$$

- Plašč:

Plašč je sestavljen iz treh pravokotnikov:

$$pl = av + bv + cv = v(a + b + c) = 15\text{ cm} \cdot (44\text{ cm}) = 660\text{ cm}^2$$

- Površina:

$$P = 2 \cdot O + pl = 2 \cdot 66\text{ cm}^2 + 660\text{ cm}^2$$

$$\underline{\underline{P = 792\text{ cm}^2}}$$

- Prostornina:

$$V = O \cdot v = 66 \cdot 15$$

$$\underline{\underline{V = 990\text{ cm}^3}}$$

- ② *Koliko litrov drži valjasti sod, če meri znotraj v premeru 40 cm, visok pa je 80 cm?*

REŠITEV:

- Prostornina:

$$V = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot (2 \text{ dm})^2 \cdot 8 \text{ dm} = 100 \text{ dm}^3$$

$$\underline{\underline{V = 100 \text{ l} = 1 \text{ hl}}}$$

- ③ *Izračunaj površino in prostornino pravilne štiristrane piramide z osnovnim robom 2 dm in stranskim robom 15 cm.*

REŠITEV:

- Osnovna ploskev:

Osnovna ploskev je kvadrat s stranico a .

$$p = a^2 = (2 \text{ dm})^2$$

$$\underline{\underline{p = 4 \text{ dm}^2}}$$

- Plašč:

Plašč je sestavljen iz štirih enakokrakih trikotnikov s katetama s in osnovnico a . Ploščino enega trikotnika izračunamo po Heronovem obrazcu.

$$s_1 = \frac{a + s + s}{2} = \frac{2 \text{ dm} + 1,5 \text{ dm} + 1,5 \text{ dm}}{2} = 2,5 \text{ dm}$$

$$p = \sqrt{s_1 \cdot (s_1 - a)(s_1 - s)(s_1 - s)} = \sqrt{2,5 \text{ dm} \cdot 0,5 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm}}$$

$$p = \sqrt{1,25 \text{ dm}^4} = 1,118 \text{ dm}^2$$

$$pl = 4 \cdot p = 4 \cdot 1,118 \text{ dm}^2$$

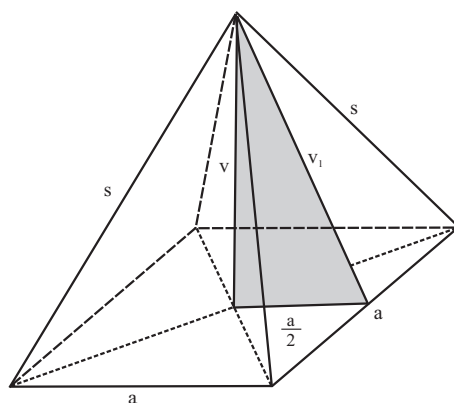
$$pl = 4,472 \text{ dm}^2$$

$$P = O + pl = 4 \, dm^2 + 4,472 \, dm^2$$

$$\underline{\underline{P = 8,472 \, dm^2}}$$

• Prostornina:

Za izračun prostornine moramo najprej izračunati višino piramide.



$$(v_1)^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 = v_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (1,12 \, dm)^2 - (1 \, dm)^2$$

$$v_1^2 = (1,5 \, dm)^2 - (1 \, dm)^2$$

$$v = \sqrt{0,25 \, dm^2}$$

$$v_1^2 = 1,25 \, dm^2$$

$$\underline{\underline{v = 0,5 \, dm}}$$

$$v_1 = \sqrt{1,25 \, dm^2}$$

$$\underline{\underline{v_1 = 1,12 \, dm}}$$

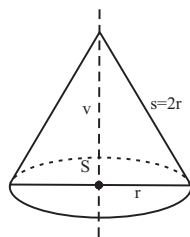
$$V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 4 \, dm^2 \cdot 0,5 \, dm = 0,6667 \, dm^3$$

$$\boxed{V = 666,7 \, dm^3}$$

- ④ Izračunaj površino in prostornino enakostraničnega stožca ($2r = 5,3 \text{ dm}$).

REŠITEV:

- Površina:



Če je enakostranični stožec, potem je $2r = s$.

$$P = O + pl = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s) = \pi \cdot 2,65 \text{ dm} \cdot (2,65 \text{ dm} + 5,3 \text{ dm})$$

$$\underline{\underline{P = 66,15 \text{ dm}^2}}$$

- Prostornina:

Če hočemo izračunati prostornino moramo poznati višino stožca.

$$v^2 = (2r)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = (5,3 \text{ dm})^2 - \left(\frac{2,65 \text{ dm}}{2}\right)^2 = 28,09 \text{ dm}^2 - 1,756 \text{ dm}^2$$

$$v = \sqrt{26,334 \text{ dm}^2}$$

$$v = 5,1 \text{ dm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2,65 \text{ dm})^2 \cdot 5,1 \text{ dm}$$

$$\underline{\underline{V = 37,5 \text{ dm}^3}}$$

Poglavje 6

Zaporedja

6.1 Definicija zaporedja

V splošnem sestavljajo *zaporedje* števila, urejena po vrstnem redu in določenem pravilu. Števila so členi zaporedja in jih označujemo s črkami in indeksi:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Indeks člena pove, na katerem mestu v zaporedju stoji posamezen člen. Tako nam indeks člena a_1 pove, da je to prvi člen zaporedja, a_2 je drugi člen zaporedja, a_3 je tretji člen zaporedja in tako naprej. Člen a_n imenujemo *splošni člen* zaporedja.

Če je število členov končno, govorimo o *končnem zaporedju*. Če pa je členov neskončno, govorimo o *neskončnem zaporedju*.

Zaporedje je lahko:

- (a) **naraščajoče**: vsak naslednji člen je večji od predhodnjega ($a_{n+1} > a_n$)
- (b) **padajoče**: vsak naslednji člen je manjši od predhodnjega ($a_{n+1} < a_n$)
- (c) **alternirajoče**: zaporedje ni niti naraščajoče niti padajoče
(Primer: 0, -1, 2, -3, 4, -5)

Zaporedje je *omejeno*, če obstaja število, ki ga noben člen zaporedja ne preseže. Če gredo vrednosti členov zaporedja proti $\pm\infty$, je zaporedje *neomejeno*.

Zgled

Zapiši zaporedje ulomkov s števcem 1 in imenovalci 1, 2, 3, 4 in tako naprej. Izrazi odvisnost splošnega člena od indeksa. Ali je zaporedje omejeno in kaj so njegove meje?

Členi zaporedja so:

$$a_1 = \frac{1}{1}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

Odvisnost splošnega člena zapišemo kot:

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{ali} \quad f(n) = \frac{1}{n}.$$

Zaporedje je padajoče in je omejeno navzdol z 0, zgornja meja pa je 1.

Definicija

Zaporedje je funkcija, definirana na množici naravnih števil, funkcijske vrednosti – členi zaporedja pa so realna števila:

$$a_n = f(n).$$

6.1.1 Zgledi

① Zapiši prve štiri člene zaporedja s členom $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

- Za n vzamemo naravna števila: $n = 1, 2, 3, 4$.

- Členi zaporedja so:

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{1}{7}$$

- Zaporedje je alternirajoče in neomejeno.

② Ugotovi kakšno je zaporedje $f(n) = \frac{1}{n^2}$.

- Členi zaporedja so:

$$a_1 = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$a_4 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

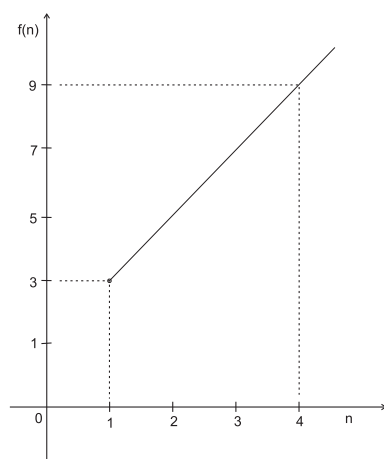
- Zaporedje je padajoče in je navzgor omejeno z 1, navzdol pa je zaporedje omejeno z 0.

③ Nariši graf zaporedja $f(n) = 2n + 1$.

- Najprej izpolnimo tabelo

n	$f(n) = 2n + 1$
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$
3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$
4	$2 \cdot 4 + 1 = 9$

- Narišemo graf funkcije.



Slika 6.1: Graf zaporedja $f(n) = 2n + 1$

6.2 Aritmetično zaporedje

6.2.1 Uvodni primer

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) je dobil kot devetletni deček v šoli nalogo, da sešteje prvih 100 naravnih števil.

Nalogo je poenostavil tako: seštel je prvi in zadnji člen zaporedja $1 + 100 = 101$, nato drugi in predzadnji člen $2 + 99 = 101$, nazadnje pa se petdeseti in enainpetdeseti člen $50 + 51 = 101$. Vedno je delna vsota 101. Nato je hitro ugotovil, da je vsota prvih 100 naravnih števil $50 \cdot 101 = 5050$.

6.2.2 Definicija

Zaporedje je **aritmetično**, če je razlika (diferenca) sosednjih števil stalna:

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d.} \quad (6.1)$$

Primeri

Nekaj aritmetičnih zaporedij: naravna števila, soda števila, liha števila, večkratniki števila 205, ...

Izrek:

Za aritmetično zaporedje s prvim členom a_1 in diferenco d velja izrek

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.} \quad (6.2)$$

Vaje

- ① Poišči petnajsti člen aritmetičnega zaporedja, če je njegov prvi člen 3 in diferenca 4.

$$a_{15} = a_1 + 14 \cdot d = 3 + 14 \cdot 4 = 3 + 56 = 59$$

- ② Izračunaj deseti člen aritmetičnega zaporedja, če je $a_3 = 16$ in $d = -2$.

$$a_{10} = a_3 + 7 \cdot d = 16 + 7 \cdot (-2) = 16 - 14 = 2$$

- ③ Prvi člen aritmetičnega zaporedja je 4, zadnji člen pa je 100. Koliko členov ima to zaporedje, če je diferenca $1\frac{1}{7}$?

$$d = 1\frac{1}{7} = \frac{8}{7}$$

Podatke vstavimo v enačbo 6.2 in dobimo:

$$100 = 4 + (n - 1) \cdot \frac{8}{7}$$

$$n - 1 = (100 - 4) \cdot \frac{7}{8}$$

$$n = 96 \cdot \frac{7}{8} + 1$$

$$\underline{\underline{n = 85}}$$

To zaporedje ima 85 členov.

6.3 Vsota aritmetičnega zaporedja

Pogosto moramo izračunati vsoto prvih n zaporednih členov aritmetičnega zaporedja – s_n .

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Izrazimo v vsoti prvič vsak člen s prvim členom, drugič pa vsak člen z zadnjim členom.

Dobimo:

$$\begin{aligned}s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) \\ s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d)\end{aligned}$$

Seštejemo obe enačbi:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)$$

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

Končno pridemo do enačbe za vsoto n členov aritmetičnega zaporedja:

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)} \quad (6.3)$$

ali

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}(2a_n - (n-1)d)}. \quad (6.4)$$

6.3.1 Primeri

① Izračunaj vsoto prvih 12 členov zaporedja $a_n = 2 + 3n$.

- Iz enačbe za splošni člen izračunamo prve tri člene zaporedja:

$$\begin{aligned}a_1 &= 2 + 3 \cdot 1 = 5 \\ a_2 &= 2 + 3 \cdot 2 = 8 \\ a_3 &= 2 + 3 \cdot 3 = 11.\end{aligned}$$

- Diferenca je $d = 8 - 5 = 3$.
- Vsota členov:

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ s_{12} &= \frac{12}{2} \cdot (2 \cdot 5 + (12-1) \cdot 3)\end{aligned}$$

$$s_{12} = 6 \cdot (10 + 11 \cdot 3) = 6 \cdot 43 = \underline{\underline{258}}$$

- ② Vsota prvih štirinajst členov aritmetičnega zaporedja s prvim členom -5 je 112. Izračunaj diferenco tega zaporedja.

- Diferenco izračunamo iz enačbe 6.3

$$s_{14} = 7 \cdot (2a_1 + 13 \cdot d)$$

$$112 = 7 \cdot (-10 + 13 \cdot d)$$

$$16 = -10 + 13 \cdot d$$

$$13 \cdot d = 26$$

$$\underline{\underline{d = 2.}}$$

- ③ Izračunaj diferenco in prve tri člene zaporedja, če je $a_7 = 50$ in $a_{12} = 35$.

- Dvanajsti člen izrazimo s sedmim členom in nato izračunamo diferenco:

$$a_{12} = a_7 + 5 \cdot d$$

$$35 = 50 + 5 \cdot d$$

$$5 \cdot d = -15$$

$$\underline{\underline{d = -3}}$$

- Na koncu izračunamo še prve tri člene zaporedja:

$$a_1 = a_7 - 6 \cdot d = 50 - 6 \cdot (-3) = \underline{\underline{68}}$$

$$a_2 = 68 + (-3) = \underline{\underline{65}}$$

$$a_3 = 65 + (-3) = \underline{\underline{62}}$$

- ④ Poišči aritmetično zaporedje, če je vsota prvega in petega člena 14, tretjega in četrtega pa 19.

- Nalogo zapišemo z enačbama:

$$a_1 + a_5 = 14$$

$$a_3 + a_4 = 19.$$

- Zgornji enačbi izrazimo s prvim členom zaporedja:

$$a_1 + (a_1 + 4 \cdot d) = 14$$

$$(a_1 + 2 \cdot d) + (a_1 + 3 \cdot d) = 19.$$

- Enačbi poenostavimo:

$$2a_1 + 4d = 14$$

$$2a_1 + 5d = 19.$$

- Odštejemo prvo enačbo od druge in dobimo $d = 5$. Vstavimo $d = 5$ v prvo enačbo:

$$2a_1 + 4 \cdot 5 = 14$$

$$2a_1 = -6$$

$$a_1 = -3.$$

- Iskano zaporedje je: -3, 2, 7, 12, 17, ...

- ⑤ V aritmetičnem zaporedju so dani prvi trije členi: $x + 1$, 5 , $3x - 3$.
Izračunaj x in vsoto prvih desetih členov.

- Najprej izrazimo dve diferenci iz podanih členov:

$$d = a_3 - a_2$$

$$d = a_2 - a_1$$

$$d = 3x - 3 - 5$$

$$d = 5 - (x + 1)$$

$$\underline{\underline{d = 3x - 8}}$$

$$d = 5 - x - 1$$

$$\underline{\underline{d = 4 - x.}}$$

- Uporabimo trik $d = d$:

$$3x - 8 = 4 - x$$

$$4x = 12$$

$$\underline{\underline{x = 3.}}$$

- Členi zaporedja so: $4, 5, 6, \dots$

- Diferenca je: $d = 4 - 3 = 1$.

- Vsota prvih desetih členov:

$$s_{10} = \frac{10}{2} \cdot (2 \cdot 4 + (10 - 1) \cdot 1)$$

$$s_{10} = 5 \cdot (8 + 9) = 5 \cdot 17$$

$$\underline{\underline{s_{10} = 85}}$$

⑥ *Koliko udarcev napravi stolpna ura v enem tednu, če bije le ure?*

- Pol dneva je 12 ur zato $n = 12$.
Razlika med urami je 1 zato $d = 1$.
Prvič ura odbije, ko je ura 1 zato $a_1 = 1$.

- V 12 urah stolpna ura odbije:

$$s_{12} = \frac{12}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 11 \cdot 1)$$

$$s_{12} = 6 \cdot (2 + 11) = 6 \cdot 13 = 78.$$

- V enem dnevu odbije $2 \cdot 78 = 156$ krat.
- V enem tednu napravi ura: $156 \cdot 7 = \underline{\underline{1092 \text{ udarcev}}}$.

6.4 Geometrijsko zaporedje

6.4.1 Uvodni primer

Na šahovnico z 8×8 kvadrati polagamo pšenična zrna: v prvi kvadrat 1 zrno, v drugega 2 zrna in tako naprej – v vsak naslednji kvadrat dvakrat več zrn kot v prejšnjega.

Število zrn v šahovskih poljih oblikujejo zaporedje, ki ga imenujemo *geometrijsko zaporedje*. Ugotovimo lahko, da je količnik sosednjih členov 2.

6.4.2 Definicija

Zaporedje je *geometrijsko*, če je količnik (q) sosednjih členov stalen.

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q} \quad (6.5)$$

Definicija

Za geometrijsko zaporedje s prvim členom a_1 in količnikom q velja:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \quad (6.6)$$

Primeri

① *Kolikšen je količnik geometrijskega zaporedja s členi: $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{32}{75}$?*

$$\bullet \quad q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{32}{75} : \frac{8}{15} = \frac{32 \cdot 15}{75 \cdot 8} = \frac{4}{5}$$

$$\bullet \quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 3}{15 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

② *Kateri je trinajsti člen geometrijskega zaporedja s členi 1, 2, 4, 8?*

- Najprej izračunamo količnik med členi zaporedja:

$$q = \frac{4}{2} = 2$$

- Sedaj izračunamo trinajsti člen:

$$a_{13} = a_1 \cdot q^{12} = 1 \cdot 2^{12} = \underline{\underline{4096}}$$

③ Določi tak x , da bodo števila $x-3$, x in $x+6$ sestavljala geometrijsko zaporedje.

- Najprej izrazimo količnik na dva načina:

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{x+6}{x}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{x}{x-3}$$

- Izenačimo obe enačbi za količnik:

$$q = q$$

$$\frac{x+6}{x} = \frac{x}{x-3}$$

$$(x+6)(x-3) = x^2$$

$$x^2 + 3x - 18 = x^2$$

$$3x = 18$$

$$\underline{\underline{x = 6}}$$

- Iskano zaporedje je: 3, 6, 12.

6.4.3 Vsota geometrijskega zaporedja

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Vsak člen zaporedja izrazimo z a_1 :

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \quad (6.7)$$

Enačbo pomnožimo s q :

$$q \cdot s_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \quad (6.8)$$

Med seboj odštejemo enačbi 6.7 in 6.8

$$q \cdot s_n - s_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

$$s_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

Končno izpeljemo enačbo za vsoto geometrijskega zaporedja:

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}} \quad (6.9)$$

6.4.4 Primeri

① Izračunajmo število pšeničnih zrn na šahovnici iz uvodnega primera.

$$\bullet s_{64} = \frac{q^{64} - 1}{q - 1} = 2^{64} - 1 = \underline{\underline{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.}}$$

② Prvi člen geometrijskega zaporedja je 5, količnik je 4. Izračunaj deseti člen in vsoto prvih desetih členov tega zaporedja.

$$\bullet a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 5 \cdot 4^9 = 5 \cdot 262\,144 = \underline{\underline{1\,310\,720}}$$

$$\bullet s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 5 \cdot \frac{4^{10} - 1}{4 - 1} = \underline{\underline{1\,747\,625}}$$

③ Zadnji – osmi člen geometrijskega zaporedja je 32, $q = 2$. Določi zaporedje in izračunaj vsoto.

- Najprej izrazimo osmi člen zaporedja s prvim členom:

$$a_8 = a_1 \cdot q^7$$

- Izračunamo prvi člen zaporedja:

$$a_1 = \frac{a_8}{q^7} = \frac{32}{2^7} = \frac{2^5}{2^7} = \frac{1}{4}$$

- Iskano zaporedje je: $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32$

$$\bullet s_8 = a \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = \frac{255}{4} = \underline{\underline{63\frac{3}{4}}}$$

- ④ *Drugi člen geometrijskega zaporedja je za 12 večji od prvega člena, tretji člen pa je 75. Določi zaporedje.*

- Zaporedje: $x, x + 12, 75$.
- Izenačimo obe enačbi za količnik zaporedja:

$$\frac{x + 12}{x} = \frac{75}{x + 12}$$

$$(x + 12)^2 = 75x$$

$$x^2 + 24x + 144 - 75x = 0$$

$$x^2 - 51x + 144 = 0$$

$$(x - 3)(x - 48) = 0$$

$$x_1 = 3 \text{ in } x_2 = 48$$

- Iskani zaporedji:

Zaporedje 1: 3, 15, 75

Zaporedje 2: 48, 60, 75

- ⑤ *Tri števila sestavljajo aritmetično zaporedje z razliko 6. Če zadnje število povečamo za 4 dobimo geometrijsko zaporedje. Katera števila so to?*

- Aritmetično zaporedje: $x, x + 6, x + 12$.
- Geometrijsko zaporedje: $x, x + 6, x + 16$.

- Izenačimo obe enačbi za količnik zaporedja:

$$\frac{x+6}{x} = \frac{x+16}{x+6}$$

$$(x+6)^2 = (x+16) \cdot x$$

$$x^2 + 12x + 36 = x^2 + 16x$$

$$4x = 36$$

$$x = 9$$

- Iskano aritmetično zaporedje je : 9, 15, 21.

⑥ *Seštej:* $1 + k^2 + k^4 + k^6 + k^8$.

- $q = \frac{k^2}{1} = k^2$

- $s_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{(k^2)^5 - 1}{k^2 - 1} = \frac{k^{10} - 1}{\underline{\underline{k^2 - 1}}}$

- ⑦ V geometrijskem zaporedju s količnikom 3 je vsota prvih šestih členov 728. Zapiši zaporedje.

- Iz enačbe za vsoto prvih šestih členov geometrijskega zaporedja izračunamo prvi člen:

$$s_6 = a_1 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1}$$

$$s_6 = a_1 \cdot 364$$

$$a_1 = 2$$

- Zaporedje: 2, 6, 18, 54, 162, ...

- ⑧ V geometrijskem zaporedju s količnikom 2 je peti člen 16. Koliko členov je treba sešteti, da dobimo vsoto 255?

- $a_5 = a_1 \cdot q^4$

$$16 = a_1 \cdot 2^4$$

$$a_1 = \frac{16}{2^4} = 1$$

- $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$255 = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$255 = 2^n - 1$$

$$2^n = 256$$

$$\underline{\underline{n = 8}}$$

Potrebno je sešteti 8 členov.

6.5 Naloge za ponavljanje

6.5.1 Aritmetično zaporedje

- ① Izračunaj vsoto s 7 deljivih naravnih števil od 1 do 500.

Rešitev:

$$7, 14, 21, 28, \dots \Rightarrow \text{AZ z: } a_1 = 7, d = 7, n = \frac{500}{7} = 71$$

$$S_n = \frac{71}{2} [2a_1 + (71 - 1)d]$$

$$S_{71} = \frac{71}{2} [2 \cdot 7 + 70 \cdot 7]$$

$$S_n = 71 \cdot (7 + 245) = 71 \cdot 252$$

$$\boxed{S_n = 17\,892}$$

- ② Prvi trije členi aritmetičnega zaporedja so $a - \frac{b}{2}$, $a + 2b$ in $a + \frac{9}{2}b$. Izračunaj vsoto prvih 15 členov tega zaporedja.

Rešitev:

$$d = a_2 - a_1 = a + 2b - a + \frac{b}{2} = \frac{5b}{2}$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \left[2 \cdot \left(a - \frac{b}{2} \right) + (15 - 1) \cdot \frac{5b}{2} \right]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \cdot (2a - b + 35b) = \frac{15}{2} (2a + 34b)$$

$$\boxed{S_{15} = 15(a + 17b)}$$

- ③ Vsota prvih 14 členov aritmetičnega zaporedja s prvim členom -5 je 112. Izračunaj diferenco tega zaporedja.

Rešitev:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{14} = \frac{14}{2} [2(-5) + (14-1)d]$$

$$112 = 7 \cdot (-10 + 13d)$$

$$112 = -70 + 91d$$

$$91d = 182$$

$$\boxed{d=2}$$

- ④ Petčlensko aritmetično zaporedje ima vsoto 40. Produkt prvega in srednjega člena je 16. Določi zaporedje.

Rešitev:

$$a_1 \cdot a_3 = 16$$

$$\text{Členi: } a_1, a_2, \boxed{a_3}, a_4, a_5 \Rightarrow x-2d, x-d, x, x+d, x+2d$$

$$S_5 = x-2d + x-d + x + x+d + x+2d = 40$$

$$5x = 40$$

$$\underline{\underline{x=8}}$$

$$a_1 \cdot a_3 = 16$$

$$(x-2d) \cdot x = 16$$

$$4-d = 1$$

$$\underline{\underline{d=3}}$$

$$\boxed{\text{Členi: } 2, 5, 8, 11, 14}$$

- ⑤ Vsota prvega in četrtega člena aritmetičnega zaporedja je 3, vsota tretjega in šestega člena pa 15. Izračunaj vsoto prvih desetih členov tega zaporedja.

Rešitev:

$$a_1 + a_4 = 3 \Rightarrow a_1 + a_1 + 3d = 3 \Rightarrow \underline{2a_1 + 3d = 3}$$

$$a_3 + a_6 = 15 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 5d = 15 \Rightarrow \underline{2a_1 + 7d = 15}$$

Enačbi med seboj odštejemo:

$$2a_1 + 3d - (2a_1 + 7d) = 3 - 15$$

$$\underline{\underline{d = 3}}$$

Izračunamo a_1 :

$$2a_1 + 3d = 3$$

$$2a + 3 \cdot 3 = 3$$

$$2a_1 = -6$$

$$\underline{\underline{a_1 = -3}}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2 \cdot (-3) + (10-1) \cdot 3]$$

$$S_{10} = 5 \cdot (-6 + 27) = 5 \cdot 21$$

$$\boxed{S_{10} = 105}$$

- ⑥ *Stranice pravokotnega trikotnika sestavljajo končno aritmetično zaporedje. Izračunajte obseg trikotnika, če meri daljša kateta 20 cm.*

Rešitev:

$$a = a_1 - d$$

$$b = a_1 = 20$$

$$c = a_1 + d$$

$$o = a + b + c$$

$$o = a_1 + a_1 + d + a_1 - d$$

$$o = 3a_1$$

$$60 = 3a_1$$

$$\underline{\underline{a_1 = 20}}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + (a_1 - d)^2 = (a_1 + d)^2$$

$$a_1^2 + a_1^2 - 2a_1 \cdot d + d^2 = a_1^2 + 2a_1 \cdot d + d^2$$

$$a_1^2 = 4a_1 \cdot d$$

$$d = \frac{a_1}{4} = \frac{20}{4}$$

$$\underline{\underline{d = 5}}$$

$a = 15 \text{ cm}; \quad b = 20 \text{ cm}; \quad c = 25 \text{ cm}$

6.5.2 Geometrijsko zaporedje

- ① Prvi člen geometrijskega zaporedja s količnikom 3 je 7, zadnji člen pa je 1701. Izračunaj vsoto tega zaporedja.

Rešitev:

$$q = 3, a_1 = 7, a_n = 1701$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$1701 = 7 \cdot 3^{n-1}$$

$$243 = 3^{n-1}$$

$$3^5 = 3^{n-1}$$

$$\underline{\underline{n = 6}}$$

$$S_6 = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 7 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1}$$

$$\boxed{S_6 = 2\,548}$$

- ② V geometrijskem zaporedju s količnikom 3 je prvi člen 2 in zadnji člen 1458. Izračunajte število vseh členov in njihovo vsoto.

Rešitev:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$1\,458 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$729 = 3^{n-1}$$

$$3^6 = 3^{n-1}$$

$$n - 1 = 6$$

$$\boxed{n = 7}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1}$$

$$S_n = 2\,187 - 1$$

$$\boxed{S_n = 2\,186}$$

- ③ *Aritmetično zaporedje enajstih členov ima vsoto 187. Prvi, tretji in enajsti člen sestavljajo geometrijsko zaporedje. Katero aritmetično zaporedje je to?*

Rešitev:

Členi:

Aritmetično zaporedje: $\underline{a_1}, a_1 + d, \underline{a_1 + 2d}, a_1 + 3d, \dots a_1 + 9d, \underline{a_1 + 10d}$

Geometrijsko zaporedje: $a_1, a_1 + 2d, a_1 + 10d$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$187 = \frac{11}{2} [2a_1 + (11-1)d]$$

$$187 = 11(a_1 + 5d)$$

$$17 = a_1 + 5d$$

$$\boxed{a_1 = 17 - 5d}$$

Vsak člen geometrijskega zaporedja je geometrijska sredina svojih neposrednih členov: $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

$$(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 10d)$$

$$4d^2 - 6a_1d = 0$$

$$4d^2 - 6(17 - 5d)d = 0$$

$$d(d - 3) = 0$$

$$\underline{\underline{d_1 = 0}}$$

$$\underline{\underline{d_2 = 3}}$$

$$\underline{(I.) \ d = 0}$$

$$a_1 = 17 - 5 \cdot 0 = 17$$

Aritmetično zaporedje: 17, 17, 17, ..., 17

Geometrijsko zaporedje: 17, 17, 17

$$\underline{(II.) \ d = 3}$$

$$a_1 = 17 - 5 \cdot 3 = 2$$

Aritmetično zaporedje: 2, 5, 8, 11, ..., 32

Geometrijsko zaporedje: 2, 8, 32

- ④ Izračunajte x tako, da bodo števila $4x + 1$, $2x - 1$, $x - 1$ prvi trije členi geometrijskega zaporedja? Zapišite prvih pet členov tega zaporedja.

Rešitev:

$$\frac{2x - 1}{4x + 1} = \frac{x - 1}{2x - 1}$$

$$(2x - 1)^2 = (4x + 1)(x - 1)$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 4x + x - 1$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

$$q = \frac{2x - 1}{4x + 1} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{4 \cdot 2 + 1}$$

$$\underline{\underline{q = \frac{1}{3}}}$$

$a_1 = 9; \quad a_2 = 3; \quad a_3 = 1; \quad a_4 = \frac{1}{3}; \quad a_5 = \frac{1}{9}$

- ⑤ Za kateri x so $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x-2}$, $\frac{1}{x-4}$ prvi trije členi geometrijskega zaporedja? Izračunaj deseti člen zaporedja.

Rešitev:

$$\frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{1}{x-4}}{\frac{1}{x-2}}$$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x-4}$$

$$\begin{aligned}(x+1)(x-4) &= (x-2)^2 \\ x^2 - 3x - 4 &= x^2 - 4x + 4 \\ \boxed{x &= 8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q = \frac{x+1}{x-2} &= \frac{8+1}{8-2} & a_1 &= \frac{1}{x+1} = \frac{1}{8+1} \\ q &= \frac{3}{2} & a_1 &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_{10} &= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 \\ \boxed{a_{10} &= \frac{2187}{512}}\end{aligned}$$

- ⑥ V geometrijskem zaporedju je tretji člen $a_3 = -6$ in sedmi člen $a_7 = -96$. Izračunajte količnik, osmi člen in vsoto prvih osmih členov.

Rešitev:

$$\begin{aligned}a_3 &= a_1 \cdot q^2 \Rightarrow \underline{-6 = a_1 \cdot q^2} \\ a_7 &= a_1 \cdot q^6 \Rightarrow \underline{-96 = a_1 \cdot q^6}\end{aligned}$$

Enačbi zdelimo:

$$\begin{aligned}(-96) : (-6) &= (a_1 \cdot q^6) : (a_1 \cdot q^2) \\ 16 &= q^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{q_1 &= 2}} \\ \underline{\underline{q_2 &= -2}}\end{aligned}$$

$$\underline{(I.) \quad q_1 = 2}$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{-6}{2^2} = -\frac{3}{2}$$

$$a_8 = a_7 \cdot q = -96 \cdot 2$$

$$\boxed{a_8 = -192}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_8 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1}$$

$$\boxed{S_8 = -\frac{765}{2}}$$

$$\underline{(II.) \quad q_2 = -2}$$

$$a_8 = \frac{a_7}{q} = -96 \cdot (-2) = 192$$

$$S_8 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{(-2)^8 - 1}{(-2) - 1}$$

$$\boxed{S_8 = \frac{255}{2}}$$

- ⑦ V geometrijskem zaporedju je vsota prvih treh členov 14, vsota naslednjih treh členov pa 112. Zapišite to zaporedje.

Rešitev:

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 14 \Rightarrow \underline{a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 14}$$

$$a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 = 112 \Rightarrow \underline{a_1 \cdot q^3(1 + q + q^2) = 112}$$

Enačbi delimo med seboj:

$$[a_1 \cdot q^3(1 + q + q^2)] : [a_1 \cdot (1 + q + q^2)] = 112 : 14$$

$$q^3 = \frac{112}{14} = 8$$

$$\underline{\underline{q = 2}}$$

$$a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 14$$

$$a_1 = \frac{14}{1 + q + q^2} = \frac{14}{1 + 2 + 4}$$

$$\underline{\underline{a_1 = 2}}$$

$a_1 = 2$	$a_4 = 16$
$a_2 = 4$	$a_5 = 32$
$a_3 = 8$	$a_6 = 64$

- ⑧ *Vsota prvih treh členov padajočega geometrijskega zaporedja je 70, njihov produkt pa je 8 000. Zapiši prve tri člene zaporedja.*

Rešitev:

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 70 \Rightarrow \underline{a_1(1 + q + q^2) = 70}$$

$$a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 = 8\,000 \Rightarrow a_1^3 \cdot q^3 = 8\,000 \Rightarrow \underline{a_1 q = 20}$$

$$a_1 q = 20 \Rightarrow q = \frac{20}{a_1} \tag{6.10}$$

V enačbo $a_1(1 + q + q^2) = 70$ vstavimo enačbo (6.10):

$$a_1 \cdot \left(1 + \frac{20}{a_1} + \frac{400}{a_1^2}\right) = 70$$

$$a_1 + 20 + \frac{400}{a_1} = 70$$

$$a_1^2 + 20a_1 + 400 = 70a_1$$

$$a_1^2 - 50a_1 + 400 = 0$$

$$(a_1 - 40)(a_1 - 10) = 0$$

$$a_1 = 40 \Rightarrow q = \frac{20}{40} \Rightarrow \underline{\underline{q = \frac{1}{2}}}$$

$$a_1 = 10 \Rightarrow q = \frac{20}{10} \Rightarrow \underline{\underline{q = 2}} \text{ ni rešitev, ker je zaporedje padajoče!!!}$$

Členi: $\boxed{40, 20, 10}$

Literatura

- [1] Vinko Udir, Matematika 1, CDI Univerzum, Ljubljana 1999.
- [2] Vinko Udir, Matematika 2, CDI Univerzum, Ljubljana 1998.
- [3] Barbara Bašar, Matematika 3, CDI Univerzum, Ljubljana 1999.
- [4] Miha Štalec, Matematika za srednjo šolo, Srednja trgovska šola, Ljubljana, 1996.
- [5] I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, G. Musiol, H. Mühling, Matematični priročnik, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 1997.
- [6] R. Maroska, A. Olpp, C. Stöckle, H. Wellstein, U. Werner, M. Strnad, Presečišče 8, DZS, Ljubljana 1996.