Naravna dedukcija v predikatni logiki

Pri metodi naravne dedukcije gre za sintaktično in formalno metodo dokazovanja veljavnosti argumentov, pri kateri s pomočjo formalnih pravil sklepanja sklep logično izpeljemo iz premis. Dokaz (ali sklepanje) tako sestavljajo trditve, ki so ali premise argumenta ali pa iz teh premis logično sledijo, pri čemer je zadnja trditev sklep, ki ga želimo izpeljati.

<table>
<tr><th colspan="2">Primarna pravila</th></tr>
<tr><td>IZKLJUČITEV</td><td>VKLJUČITEV</td></tr>
<tr><td>P ⊃ Q, P ∴ Q</td><td></td></tr>
<tr><td>P Λ Q, ∴ P, ∴ Q</td><td>P, Q, ∴ P Λ Q</td></tr>
<tr><td>P V Q, ¬ P ∴ Q</td><td>P ∴ P V Q</td></tr>
<tr><td>P ≡ Q ∴P ⊃ Q, ∴Q ⊃ P</td><td>P ⊃ Q, Q ⊃ P, ∴ P ≡ Q</td></tr>
<tr><td>¬ ¬ P, ∴ P</td><td>P, ∴ ¬ ¬ P</td></tr>
<tr><td colspan="2">(⊃ V) ali (KN) - Pravilo vključitve implikacije ali kondicionalizacija:
Če izpeljemo Q iz hipoteze P, potem razbremenimo hipotezo P in sklepamo na P ⊃ Q.</td></tr>
<tr><td colspan="2">(¬ V) ali (RA) - Pravilo vključitve negacije ali reductio ad absurdum:
Če izpeljemo protislovje iz hipoteze P, potem razbremenimo to hipotezo in sklepamo na ¬ P.</td></tr>
</table>

Primera:

* Fa ∴ Fa V Fb	* Fa ⊃ ¬ Fc, Fc, ∴ ¬ Fa
1. Fa d	1. Fa ⊃ ¬ Fc d
2. Fa V Fb (VV): (1)	2. Fc d
	3. ¬ Fa (MT): (1),(2)

Za sistem naravne dedukcije v predikatni logiki moramo uvesti še dodatna pravila, ki bodo veljala za tiste izraze v sklepanju, ki vsebujejo univerzalni in eksistenčni kvantifikator.

<table>
<tr><th>IZKLJUČITEV</th><th>VKLJUČITEV</th></tr>
<tr><td><u>(∀IZ)</u>
(∀x) Fx
Fn</td><td><u>(∀V)</u>
Fa
(∀x) Fx</td></tr>
<tr><td><u>(∃IZ)</u>
(∃x) Fx
| Fa ...
| FORM.
FORM.</td><td><u>(∃V)</u>
Fa
(∃x) Fx</td></tr>
</table>

Izključitev univerzalnega kvantifikatorja (∀IZ)

Univerzalno kvantificirane variable lahko uprimerimo s poljubnim imenom (pri čemer moramo paziti na to, kaj je glavni veznik formule in da vse pojavitve variable v formuli nadomestimo z istim imenom.)

(∀x) Fx
Fn

primer:

Vsi ljudje so smrtni.	(∀x) (Cx ⊃ Sx)	1. (∀x) (Cx ⊃ Sx)	d
Sokrat je človek.	Cs	2. Cs	d
Sokrat je smrten.	∴ Ss	3. Cs ⊃ Ss	(∀IZ):(1)
		4. Ss	(MP):(2),(3)

primera napak:

# 1	(∀x) (Fx ⊃ Gx), ∴ Fa ⊃ Gb		*# 2*	(∀x) Fx ⊃ Ga, ∴ Fb ⊃ Ga	
	1. (∀x) (Fx ⊃ Gx)	d		1. (∀x) Fx ⊃ Ga	d
	2. Fa ⊃ Gb	XXX		2. Fb ⊃ Ga	XXX

Vključitev univerzalnega kvantifikatorja (∀V)

Iz Fa lahko izpeljemo (∀x) Fx, ki jo dobimo, če nadomestimo vsak nastop imena a s spremenljivko x, ki ni nastopala v prvotni formuli Fa, pri čemer a ne sme nastopati v začetnih domnevah ali v nerazbremenjenih hipotezah v vrstici, v kateri nastopa a.

Fa
(∀x) Fx

primeri:

* (∀x) (Fx ⊃ Gx), (∀x) (Fx) ∴ (∀x) (Gx)

1. (∀x) (Fx ⊃ Gx)	d
2. (∀x) (Fx)	d
3. Fa ⊃ Ga	(∀IZ): (1)
4. Fa	(∀IZ): (2)
5. Ga	(MP): (3), (4)
6. (∀x) (Gx)	(∀V): (5)

* $(\forall x)\ (Kx\ \Lambda\ Gx)\ \therefore\ (\forall x)\ Kx\ \Lambda\ (\forall x)\ Gx$

1. $(\forall x)\ (Kx\ \Lambda\ Gx)$	d
2. $Ka\ \Lambda\ Ga$	$(\forall IZ)$: (1)
3. Ka	(ΛIZ): (2)
4. Ga	(ΛIZ): (2)
5. $(\forall x)\ Kx$	$(\forall V)$: (3)
6. $(\forall x)\ Gx$	$(\forall V)$: (4)
7. $(\forall x)\ Kx\ \Lambda\ (\forall x)\ Gx$	(ΛV): (5), (6)

* $(\forall x)\ (Fx \supset Gx)\ \therefore\ (\forall x)\ (Fx \supset (Gx\ V\ Hx))$

1. $(\forall x)\ (Fx \supset Gx)$	d
2. ⎢ Fa	h (za KN)
3. ⎢ $Fa \supset Ga$	$(\forall IZ)$: (1)
4. ⎢ Ga	(MP): (2), (3)
5. ⎢ $Ga\ V\ Ha$	(VV): (4)
6. $Fa \supset (Ga\ V\ Ha)$	(KN): (2)-(5)
7. $(\forall x)\ (Fx \supset (Gx\ V\ Hx)$	$(\forall V)$: (5)

<u>Vključitev eksistenčnega kvantifikatorja $(\exists V)$</u>

Iz Fa lahko izpeljemo $(\exists x)$ Fx, kjer nastop imena nadomestimo z variablo, pri čemer pa ta ne sme nastopati v prvotni formuli.

Fa
$(\exists x)$ Fx

primer:

$Fa\ \Lambda\ Ga$	$Fa\ \Lambda\ Ga$
$(\exists x)\ (Fx\ \Lambda\ Gx)$	$(\exists x)\ (Fx\ \Lambda\ Ga)$

primer napake:

$Fa \supset Ga$
$(\exists x)\ Fx \supset Ga$ XXX

* $(\forall x)\ (Fx\ V\ Gx)\ \therefore\ (\exists x)\ (Fx\ V\ Gx)$

1. $(\forall x)\ (Fx\ V\ Gx)$	d
2. $Fa\ V\ Ga$	$(\forall IZ)$: (1)
3. $(\exists x)\ (Fx\ V\ Gx)$	$(\exists V)$: (2)

* $\neg (\exists x)\, Fx \quad \therefore\ (\forall x)\, \neg Fx$

1. $\neg (\exists x)\, Fx$	d
2. $\mid Fa$	h (za RA)
3. $\mid (\exists x)\, Fx$	$(\exists V)$: (2)
4. $\mid (\exists x)\, Fx \wedge \neg (\exists x)\, Fx$	$(\wedge V)$: (1), (3)
5. $\neg Fa$	(RA): (2)-(4)
6. $(\forall x)\, \neg Fx$	$(\forall V)$: (5)

Izključitev eksistenčnega kvantifikatorja (∃IZ)

Iz dane eksistenčno kvantificirane formule $(\exists x)\, Fx$ in izpeljave sklepa iz hipoteze, ki jo dobimo z nadomestitivijo vsakega nastopa variable v tej formuli z imenom, lahko (z razbremenitvijo hipoteze) ta sklep zatrdimo; pri čemer pa uporabljeno ime ne sme nastopati v (i) začetnih domnevah, (ii) sklepu ali (iii) v kateri koli hipotezi, ki še ni razbremenjena v vrstici, kjer uporabimo pravilo (∃IZ).

$(\exists x)\, Fx$
$\mid Fa$
$\mid \ldots$
$\mid$ FOR.
FOR.

* $(\exists x)\, (Fx \wedge Gx) \quad \therefore\ (\exists x)\, Fx$

1. $(\exists x)\, (Fx \wedge Gx)$	d
2. $\mid Fa \wedge Ga$	h (za ∃IZ)
3. $\mid Fa$	$(\wedge IZ)$: (2)
4. $\mid (\exists x)\, Fx$	$(\exists V)$: (3)
5. $(\exists x)\, Fx$	$(\exists IZ)$: (2)-(3)

Vaja: Z naravno dedukcijo dokaži veljavnost argumenta.

<1> $(\forall x)\, (Fx) \quad \therefore\ (\forall x)\, (Fx \vee Gx)$

<2> $\neg (\exists x)\, \neg Fx \quad \therefore\ (\forall x)\, Fx$

<3> $(\exists x)\, Fx,\ (\forall x)\, (Fx \supset Gx) \quad \therefore\ (\exists x)\, Gx$

<4> $(\exists x)\, (Rx \wedge Ix),\ (\forall x)\, (Ix \supset \neg Nx) \quad \therefore\ (\exists x)\, (Rx \wedge \neg Nx)$

<5> $(\forall x)\, Fx \supset (\forall x)\, Gx,\ \neg Ga \quad \therefore\ \neg (\forall x)\, Fx$

<6> $(\forall x)\, (Fx \supset Gx),\ Fa \wedge Ga \quad \therefore\ \neg (\exists x)\, (Gx \wedge Hx)$