Vaja 7

Dokazovanje veljavnosti argumentov z metodo naravne dedukcije – stavčna logika

Pri metodi naravne dedukcije gre za sintaktično in formalno metodo dokazovanja veljavnosti argumentov, pri kateri s pomočjo formalnih pravil sklepanja sklep logično izpeljemo iz premis. Dokaz (ali sklepanje) tako sestavljajo trditve, ki so ali premise argumenta ali pa iz teh premis logično sledijo, pri čemer je zadnja trditev sklep, ki ga želimo izpeljati.

Primarna pravila

Pravilo izključitve implikacije ali *modus ponens* (⊃ IZ) ali (MP)

Iz pogojnika P ⊃ Q in njegovega antecedensa P izpeljemo njegov konsekvens Q.

$$\begin{array}{|l|}\hline P \supset Q \\ P \\ \therefore Q \\ \hline\end{array}$$

Pravilo izključitve konjunkcije(Λ IZ)

Iz konjunkcije P /\ Q izpeljemo kateregakoli od konjunktov, P ali Q.

$$\begin{array}{|l|}\hline P \land Q \\ \therefore P, \therefore Q \\ \hline\end{array}$$

Pravilo vključitve konjunkcije (Λ V) -

Iz P in Q izpeljemo P /\ Q.

$$\begin{array}{|l|}\hline P \\ Q \\ \therefore P \land Q \\ \hline\end{array}$$

Pravilo izključitve negacije ali »opustitev« dvojne negacije (¬¬ IZ)

Iz ¬ ¬ P izpeljemo P.

$$\begin{array}{|l|}\hline \neg \neg P \\ \therefore P \\ \hline\end{array}$$

Vaja 7

Pravilo izključitve disjunkcije ali "disjunktivni silogizem" (V $IZ_{\supset}$) ali (DS)

Iz P V Q in ¬ P izpeljemo Q; iz P V Q in ¬ Q izpeljemo P.

P V Q **¬ P** **∴ Q**	**P V Q** **¬ Q** **∴ P**

Pravilo vključitve disjunkcije (V V)

Iz P izpeljemo disjunkcijo P V Q ali Q V P.

P **∴ P V Q**

Pravilo vključitve ekvivalence (≡ V)

Iz P ⊃ Q in Q ⊃ P izpeljemo P ≡ Q.

P ⊃ Q **Q ⊃ P** **∴ P ≡ Q**

Pravilo izključitve ekvivalence (≡ IZ)

Iz P ≡ Q izpeljemo P ⊃ Q ali Q ⊃ P.

P ≡ Q **∴P ⊃ Q, ∴Q ⊃ P**

Pravilo vključitve implikacije ali *kondicionalizacija* (⊃ V) ali (KN)

Če izpeljemo Q iz hipoteze P, potem razbremenimo hipotezo P in sklepamo na P ⊃ Q.

Pravilo vključitve negacije ali *reductio ad absurdum* (¬ V) ali (RA)

Če izpeljemo protislovje iz hipoteze P, potem razbremenimo to hipotezo in sklepamo na ¬ P.

Vaja 7

Vaja A: Z naravno dedukcijo dokaži veljavnost argumenta.

<1> $(p \lor r) \supset q,\ r,\ \therefore\ q$

rešitev:

1.	$(p \lor r) \supset q$	d
2.	r	d
3.	$p \lor r$	VV; 2
4.	q	MP; 1,3

<2> $(p \lor q) \supset r,\ p,\ \therefore\ r \lor s$

<3> Če zmagata Janko ali Marta, potem izgubita Maja in Tadej. Zmagal je Janko. Torej je Maja izgubila.

<4> $(p \lor q) \land (r \lor s),\ \neg r,\ \therefore\ s$

<5> $\neg p \supset \neg\neg q,\ \neg\neg\neg p,\ \therefore\ q$

<6> $p \supset (q \land r),\ \neg\neg p,\ \therefore\ p \land q$

<7> $(p \land q) \supset (r \land s),\ q,\ \neg\neg p,\ \therefore\ s$

<8> $p\ \therefore\ (p \lor q) \land (p \lor r)$

<9> $p \equiv (q \lor r),\ r,\ \therefore\ p$

<10> $p \supset r,\ r \supset q,\ \therefore\ p \supset q$

<11> $p \land q,\ \therefore\ p \equiv q$

<12> $p \supset q,\ \neg q,\ \therefore\ \neg p$

<13> $(p \land q) \supset r,\ p \land \neg r,\ \therefore \neg q$

<14> $(p \lor \neg q) \supset \neg s,\ \therefore\ \neg\neg s \supset \neg (p \lor \neg q)$

<15> $(\neg p \lor s) \supset (q \lor \neg\neg r),\ \neg q \land \neg p,\ \therefore\ r$

Vaja 7

Pogojno sklepanje

Primarna pravila

IZKLJUČITEV		VKLJUČITEV	
($\supset$ IZ), (MP)	$P \supset Q$ P $\therefore Q$		
($\land$ IZ)	$P \land Q$ $\therefore P, \therefore Q$	**($\land$ V)**	P Q $\therefore P \land Q$
($\lor$ IZ$_{\supset}$), (DS)	$P \lor Q$ $\neg P$ $\therefore Q$	**($\lor$ V)**	P $\therefore P \lor Q$
($\equiv$ IZ)	$P \equiv Q$ $\therefore P \supset Q, \therefore Q \supset P$	**($\equiv$ V)**	$P \supset Q$ $Q \supset P$ $\therefore P \equiv Q$
($\neg\neg$ IZ)	$\neg\neg P$ $\therefore P$	**($\neg\neg$ V)**	P $\therefore \neg\neg P$

($\supset$ V) ali (KN) - Pravilo vključitve implikacije ali *kondicionalizacija:*
Če izpeljemo Q iz hipoteze P, potem razbremenimo hipotezo P in sklepamo na $P \supset Q$.

($\neg$ V) ali (RA) - Pravilo vključitve negacije ali *reductio ad absurdum:*
Če izpeljemo protislovje iz hipoteze P, potem razbremenimo to hipotezo in sklepamo na $\neg P$.

Vaja B: Z naravno dedukcijo dokaži veljavnost argumenta.

<16> $p \supset \neg q, \neg q \supset r, \therefore p \supset r$

rešitev:

1.	$p \supset \neg q$	d
2.	$\neg q \supset r$	d
3.	$\mid\ p$	h (za KN)
4.	$\mid\ \neg q$	(MP): (1), (3)

Vaja 7

5. $\mid$ r (MP): (2), (4)
6. $p \supset r$ (KN): (3)-(5)

<17> $p \supset \neg q, q, \therefore \neg p$

rešitev:
1. $p \supset \neg q$ d
2. q d
3. $\mid$ p h (za RA)
4. $\mid$ $\neg q$ (MP): (1), (3)
5. $\mid$ $q \, \Lambda \neg q$ (Λ V): (2), (4) (*protisl.)*
6. $\neg p$ (RA): (3)-(5)

<18> $p \supset \neg q, \therefore p \supset (p \, \Lambda \neg q)$

<19> $(\neg p \, \Lambda \, q) \supset \neg r, r, q, \therefore p$

<20> Če ne bo deževalo in se nam jutri ne bo treba učiti za izpite, potem bomo odšli na piknik. Če bomo odšli na piknik, se bomo zabavali. Jutri se nam ne bo treba učiti. Torej, če ne bo deževalo, se bomo zabavali.

<21> $(p \, V \, q) \supset \neg s, \therefore s \supset \neg (p \, V \, q)$

<22> Če bo še naprej deževalo, potem se bo gladina reke dvignila. Če bo še naprej deževalo in se bo gladina reke dvignila, potem bo odneslo most. Če nadaljevanje dežja povzroči to, da odnese most, potem zgolj ena cesta ni dovolj za oskrbo mesta. Ena cesta je dovolj za oskrbovanje mesta ali pa so se urbanistični načrtovalci zmotili. Torej so se urbanistični načrtovalci zmotili.

<23> $p \equiv (\neg q \, \Lambda \, r), \neg r, \therefore \neg p$

<24> $p, (p \, \Lambda \neg q) \supset \neg r, \neg r \supset \neg s, \therefore \neg q \supset \neg s$

<25> $(p \, \Lambda \, q) \, V \, (p \, \Lambda \, r), \therefore p \, \Lambda \, (q \, V \, r)$

<26> $p \equiv (q \, \Lambda \, r), \neg \neg q, \therefore r \supset p$

<27> $(p \, V \neg q) \supset (\neg r \, \Lambda \, s), (\neg r \, V \, s) \supset t, p, \therefore t$

Vaja 7

<18> $p \wedge q,\ p \supset (r \vee s),\ q \wedge \neg r,\ \therefore\ (s \wedge p) \wedge q$

<29> $p \supset (q \vee (r \wedge s)),\ p \wedge \neg q,\ \therefore\ \neg\neg s$

<30> $(\neg\neg p \wedge q) \supset \neg r,\ p \wedge \neg\neg r,\ \therefore \neg q$

Sekundarna pravila

<table>
<tr><th colspan="4">Sekundarna pravila</th></tr>
<tr><td>(MT)</td><td>$P \supset Q$
$\neg Q$
$\therefore \neg \mathbf{P}$</td><td>(EFQ)</td><td>$P, \neg P$
$\therefore \mathbf{Q}$</td></tr>
<tr><td>(TZ)</td><td>$P \supset Q, Q \supset R$
$\therefore \mathbf{P \supset R}$</td><td>(MI)</td><td>$P \supset Q, \therefore \neg \mathbf{P \vee Q}$
$P \supset Q, \therefore \neg\mathbf{(P \wedge \neg Q)}$
$\neg P \vee Q, \therefore \mathbf{P \supset Q}$
$\neg(P \wedge \neg Q), \therefore \mathbf{P \supset Q}$</td></tr>
<tr><td>(ABS)</td><td>$P \supset Q$
$\therefore \mathbf{P \supset (P \wedge Q)}$</td><td>(KM)</td><td>$P \wedge Q, \therefore \mathbf{Q \wedge P}$
$P \vee Q, \therefore \mathbf{Q \vee P}$</td></tr>
<tr><td>(V IZ$_{\supset}$)</td><td>$P \vee Q$
$P \supset R, Q \supset R$
$\therefore \mathbf{R}$</td><td>(AS)</td><td>$(P\wedge Q)\wedge R, \therefore \mathbf{P\wedge(Q\wedge R)}$
$P\wedge(Q\wedge R), \therefore \mathbf{(P\wedge Q)\wedge R}$
$(P\vee Q)\vee R, \therefore \mathbf{P\vee(Q\vee R)}$
$P\vee(Q\vee R), \therefore \mathbf{(P\vee Q)\vee R}$</td></tr>
<tr><td>(KD)</td><td>$P \vee Q$
$P \supset R, Q \supset S$
$\therefore \mathbf{R \vee S}$</td><td rowspan="2">(DB)</td><td rowspan="2">$(P\wedge Q)\vee R, \therefore \mathbf{(P\vee R)\wedge(Q\vee R)}$
$(P\vee R)\wedge(Q\vee R), \therefore \mathbf{(P\wedge Q)\vee R}$
$(P\vee Q)\wedge R, \therefore \mathbf{(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)}$
$(P\wedge R)\vee(Q\wedge R), \therefore \mathbf{(P\vee Q)\wedge R}$</td></tr>
<tr><td>(KP)</td><td>$P \supset Q$
$\therefore \neg \mathbf{Q} \supset \neg \mathbf{P}$</td></tr>
<tr><td>(DM)</td><td>$\neg P \vee \neg Q, \therefore \neg\mathbf{(P \wedge Q)}$
$P \vee Q, \therefore \neg\mathbf{(\neg P \wedge \neg Q)}$
$\neg(P \wedge Q), \therefore \mathbf{\neg P \vee \neg Q}$
$\neg(\neg P \wedge \neg Q), \therefore \mathbf{(P \vee Q)}$</td><td colspan="2">$\neg P \wedge \neg Q, \therefore \neg\mathbf{(P \vee Q)}$
$P \wedge Q, \therefore \neg\mathbf{(\neg P \vee \neg Q)}$
$\neg(P \vee Q), \therefore \mathbf{\neg P \vee \neg Q}$
$\neg(\neg P \vee \neg Q), \therefore \mathbf{P \wedge Q}$</td></tr>
</table>

Vaja 7

Vaja C: Z naravno dedukcijo dokaži veljavnost argumenta.

<31> $\neg(p \lor q)$, $\therefore \neg p \land \neg q$

rešitev:

1. $\neg(p \lor q)$	d	1. $\neg(p \lor q)$	d
2. $\mid p$	h (za RA)	2. $\neg p \land \neg q$	(DM)
3. $\mid p \lor q$	(VV):(2)		
4. $\mid (p \lor q) \land \neg(p \lor q)$	(ΛV):(1),(3)		
5. $\neg p$	(RA):(2)-(4)		
6. $\mid q$	h (za RA)		
7. $\mid p \lor q$	(VV):(6)		
8. $\mid (p \lor q) \land \neg(p \lor q)$	(ΛV):(1),(7)		
9. $\neg q$	(RA):(6)-(8)		
10. $\neg p \land \neg q$	(ΛV):(5),(9)		

<32> $\neg p \supset q$, $r \supset s$, $\neg p \lor r$, $\neg q$, $\therefore s$

rešitev:

1. $\neg p \supset q$	d		
2. $r \supset s$	d		
3. $\neg p \lor r$	d		
4. $\neg q$	d		
5. $\neg\neg p$	(MT):(1),(4)	5. $q \lor s$	(KD):(1),(2),(3)
6. p	(¬¬IZ):(5)	6. s	(VIZ):(4),(5)
7. r	(VIZ):(3),(6)		
8. s	(MP):(2),(7)		

<33> $p \supset q$, $(p \land q) \supset r$, $\neg r$, $\therefore \neg p$

<34> $(\neg p \land q) \supset \neg r$, r, q, $\therefore p$

<35> $p \supset (q \supset \neg r)$, r, $\therefore \neg p \lor \neg q$

<36> $\neg p \lor \neg q$, $r \supset p$, $\neg\neg q \lor \neg s$, $\therefore \neg s \lor \neg r$

<37> $p \equiv q$, $\therefore \neg((p \supset q) \supset \neg(q \supset p)$

<38> $(p \supset q) \land (p \supset r)$, $\therefore p \supset (q \land r)$

Vaja 7

<39> $p \Lambda q, \therefore p \supset q$

<40> $(\neg p \Lambda q) \supset \neg r, r, q, \therefore p$

<41> $p \equiv (q \Lambda r), \neg \neg q, \therefore r \supset p$

<42> $(p \mathrm{V} \neg q) \supset (\neg r \Lambda s), (\neg r \mathrm{V} s) \supset t, p, \therefore t$

<43> $(\neg\neg p \supset r), (q \supset r), \therefore (p \mathrm{V} q) \supset r$

<44> $p \Lambda q, p \supset (r \mathrm{V} s), q \Lambda \neg r, \therefore (s \Lambda p) \Lambda q$

<45> $p \supset (q \mathrm{V} (r \Lambda s)), p \Lambda \neg q, \therefore s$

<46> $(p \Lambda q) \supset \neg r, p \Lambda r, \therefore \neg q$

<47> $p \equiv (\neg q \Lambda r), \neg r, \therefore \neg p$

<48> $p, (p \Lambda q) \supset \neg r, \neg r \supset \neg s, \therefore q \supset \neg s$

<49> $p \mathrm{V} \neg q, r \supset \neg p, \neg\neg q \mathrm{V} \neg s, \therefore \neg s \mathrm{V} \neg r$

<50> $p \equiv q, \therefore \neg((p \supset q) \supset \neg(q \supset p))$

<51> $(\neg p \supset q) \Lambda (\neg p \supset r), \therefore \neg p \supset (q \Lambda r)$

<52> $p \Lambda q, \therefore p \supset q$

<53> $(\neg p \Lambda q) \supset \neg r, r, q, \therefore p$

<54> $p \equiv (q \Lambda r), \neg \neg q, \therefore r \supset p$