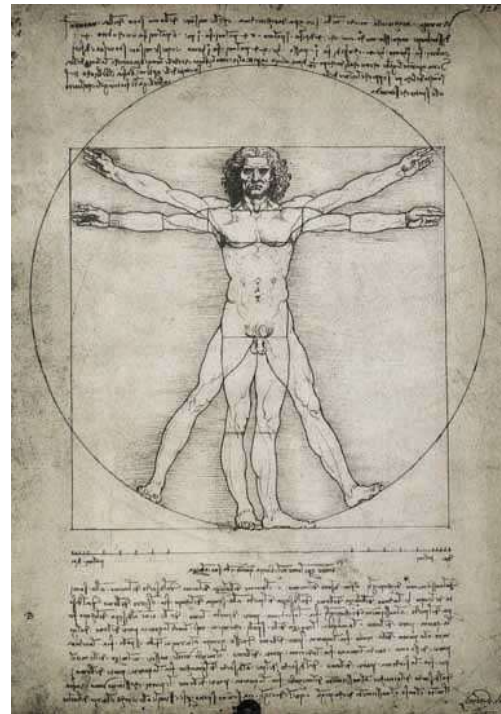


Marko Uršič

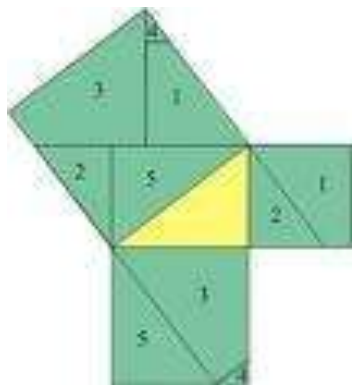
Filozofska fakulteta, UL

Pomen geometrije v renesančni umetnosti in filozofiji

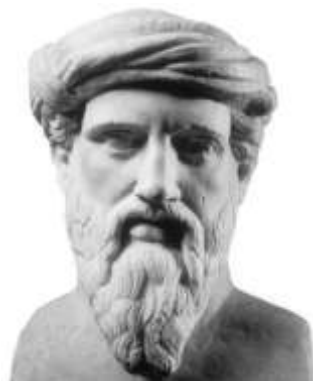


Seminar “Matematika in umetnost”, DMFA, 14. marca 2014

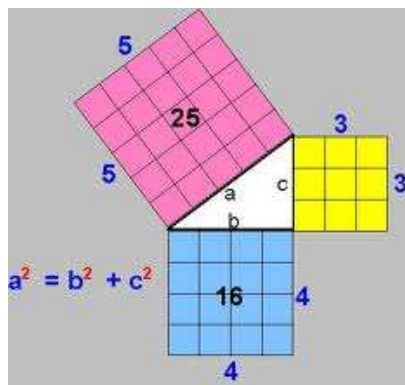
Pitagora (6. st. pr. n. š.): števila kot “prapočela” vseh stvari ter nauk o harmoniji duše in sveta



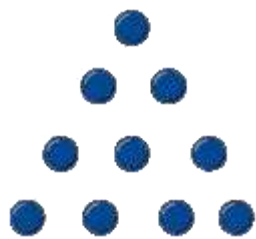
Pitagorov izrek,
geometrijski dokaz
(po Evklidu)



Pitagora



Pitagorov izrek,
aritmetični dokaz



pitagorejska
“desetica”
kot geometrijski
tetraktis :
 $1+2+3+4=10$

Pitagora sam ni nič zapisal, njegove misli je ohranil učenec **Filolaj** (5. st.); odlomki (prev. Sovre, *Predsokratiki*):

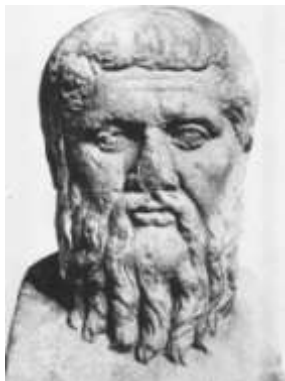
“Pitagoras in Filolaos sta učila, da je duša harmonija.” (A 23)

“Vse, kar je spoznatno, ima število: brez njega ni moč nobene reči ne z mislijo zajeti ne spoznati.” (B 4)

“Število ima dve posebne lastnosti, lihost in sodost, tretja pa je mešanica obeh, sodolihost.” (B 5)

“Harmonija je spojitev mnogozmesnega in složnost razdvojenega.” (B 10)

“Dejavnost in bistvo števila je treba presojati po moči, ki leži v desetici [...] Brez nje je vse neomejeno in nerazločno in temno.” (B 11)

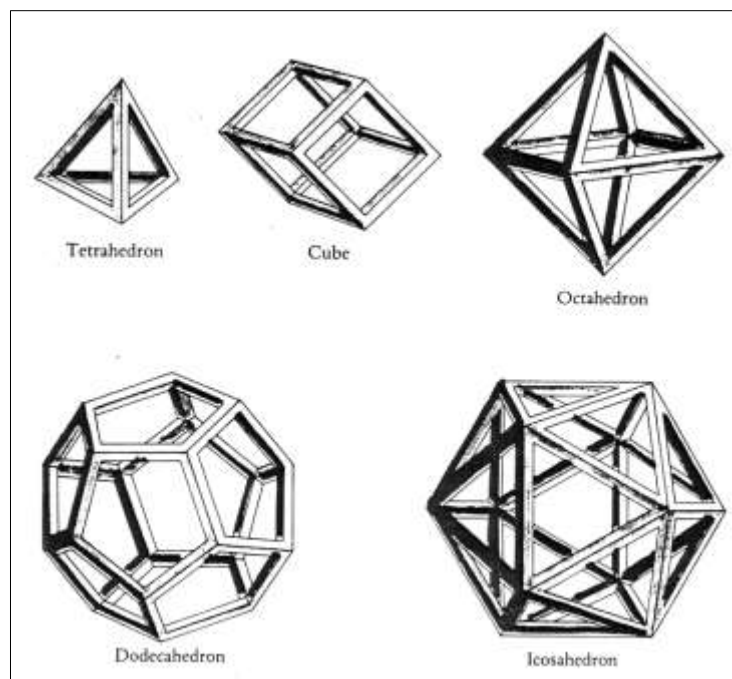


Platon v kozmološki razpravi *Timaj* (4. st. pr. n. š.):
pravilni poliedri so “idealna geometrijska telesa”

Pet jih je, sestavljeni so iz enakostraničnih
trikotnikov, kvadratov in peterokotnikov:

tetraeder (iz 4 trikotnikov),
heksaeder (tj. kocka, iz 6 kvadratov),
oktaeder (iz 8 trikotnikov),
dodekaeder (iz 12 peterokotnikov),
ikozaeder (iz 20 trikotnikov).

Matematiki so pozneje dokazali, da je
takšnih, “konveksno” pravilnih poliedrov
res *samo* pet.

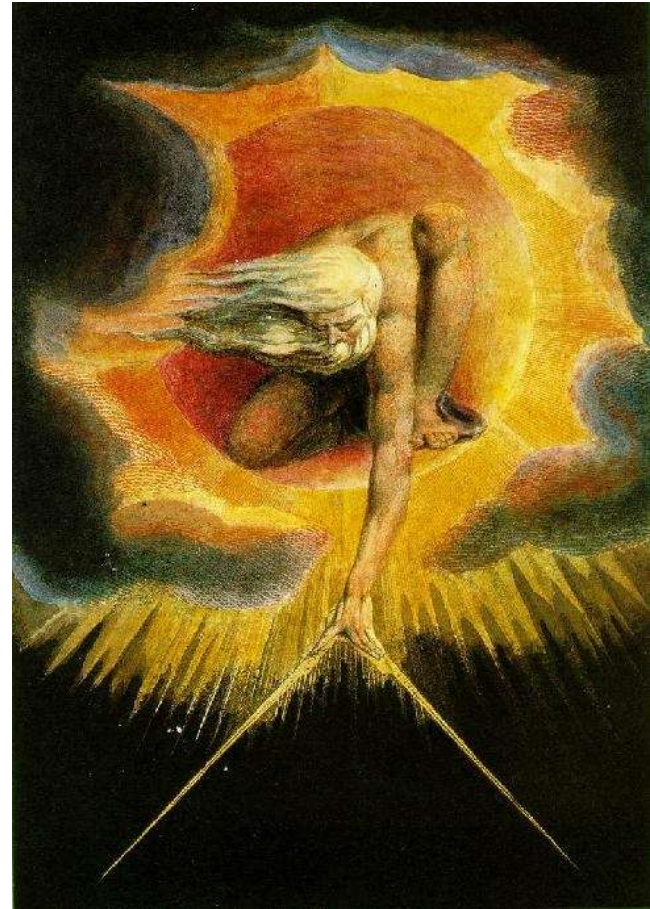


Platon v *Timaju* postavi tezo, da so iz teh petih idealnih geometrijskih teles sestavljeni štirje zemeljski elementi in eter: zemlja iz kock, voda iz ikozaedrov, zrak iz oktaedrov, ogenj iz tetraedrov (intuitivno načelo teh povezav je njihova “ostrina”, “stabilnost”, “tekočnost” ipd.) – eter, nebesni “peti element” pa je sestavljen iz dodekaedrov. Platon o dodekaedru pravi: »Bog ga je uporabil za vesolje, ko ga je krasil s podobami« (*Timaj*, 55c). Seveda pa je najbolj idealno geometrijsko telo kroglja, sfera, oblika samega neba.

Bog, stvarnik sveta, ustvarja kot véliki Arhitekt:
s šestilom, v matematičnih razmerjih ...

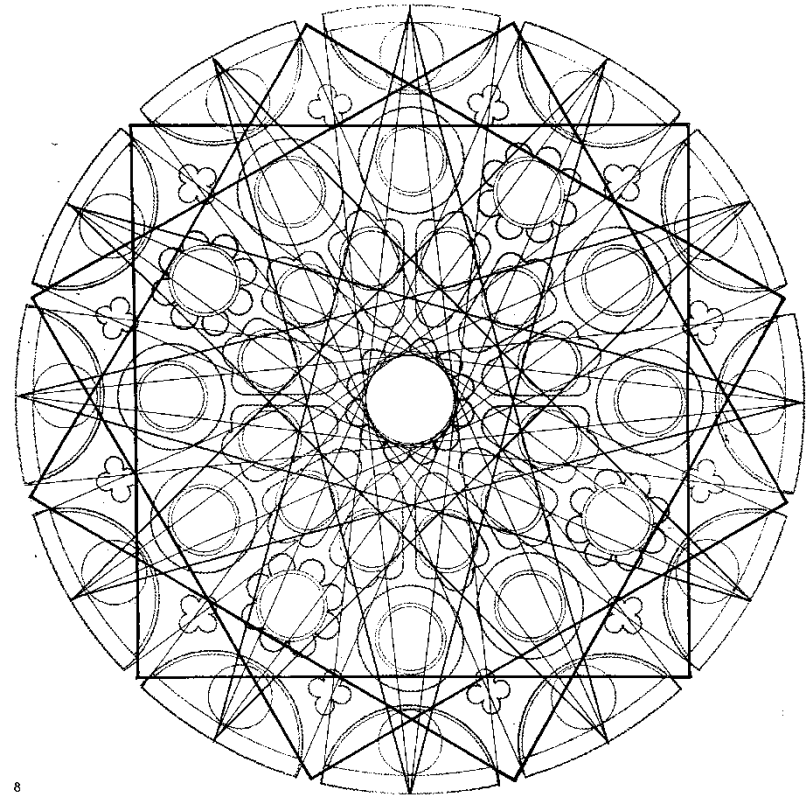
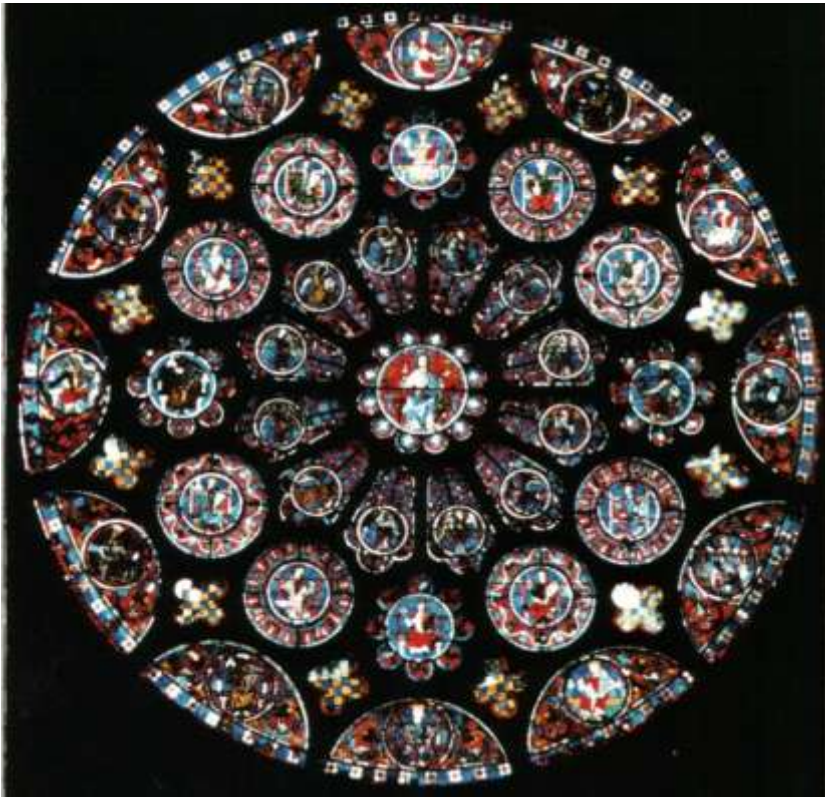


Ilustracija iz *Biblije*,
Francija, 13. st



William Blake, "Starec dni",
barvna jedkanica, 1794

Velika rozeta, “roža” vitrajev v gotski katedrali
Naše Gospe (*Notre-Dame*) v Chartresu, Francija, 13. st.



8

Desno: Geometrijska analiza južne rozete v Chartresu:
12 likov na obodu velikega kroga kot “zrcala” vodijo pogled k središču,
v katerem je Kristus; 3 veliki kvadrati so tangente srednjih krogov itd.
(Painton Cowen, *Rose Windows*, Thames & Hudson, London, 1992.)

Čaščenje geometrije se obnovi v obdobju renesanse



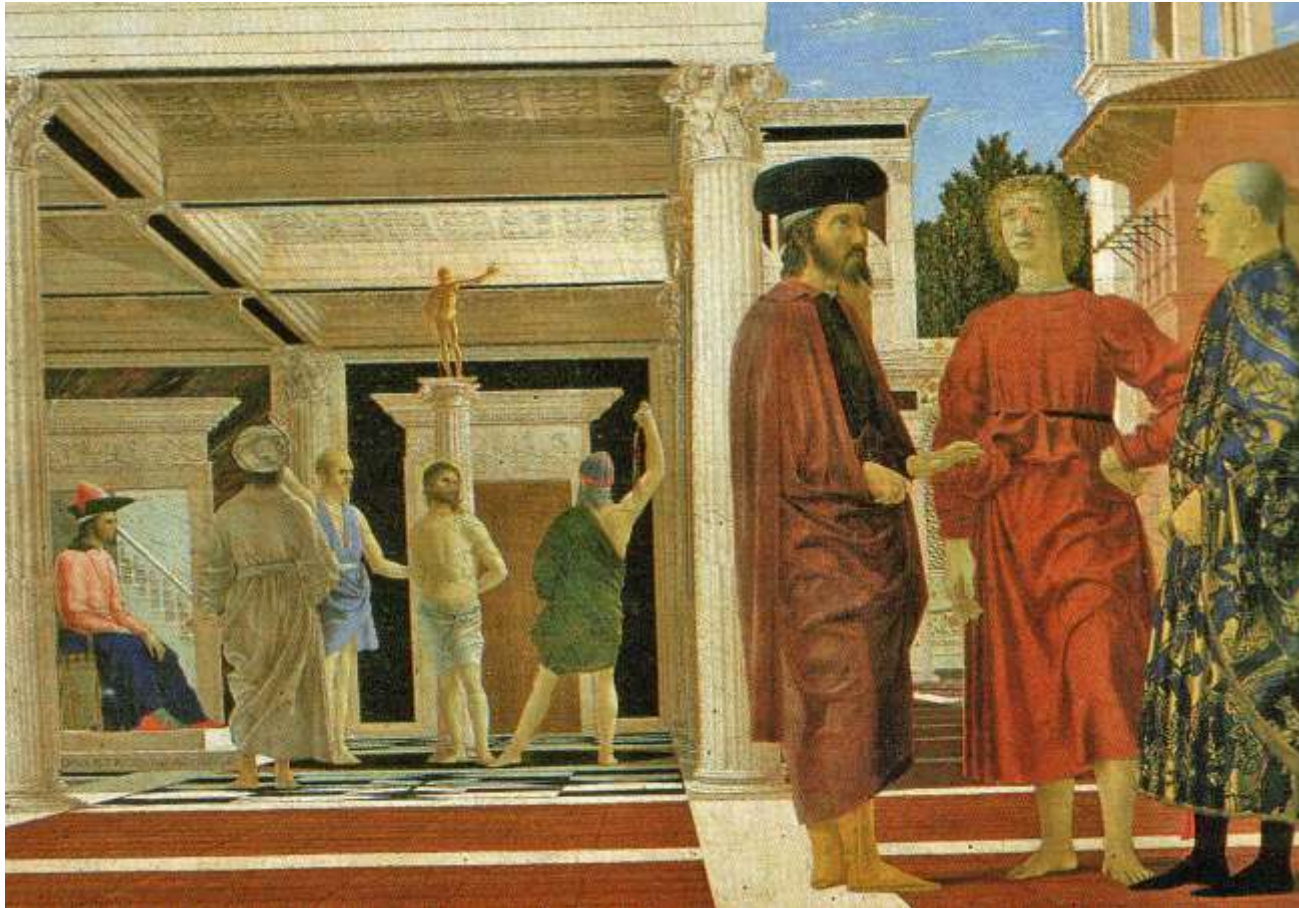
Fra Luca Pacioli, renesančni matematik in Leonardov prijatelj, kontemplira neko “skoraj idealno” geometrijsko telo (avtor slike je Jacopo de' Barbari, 1495).

Fra Angelico, *Oznanjenje*
ok. 1440, samostan San Marco, Firenze



... realna in virtualna arhitektura (perspektiva),
povezava zunanosti in notranosti ...

Piero della Francesca, *Bičanje Kristusa*, Urbino, 15. st.



Očišče perspektive je nižje od "običajnega"...
simbolni pomen(i) perspektive v renesančni umetnosti

“Arhitekturna perspektiva”

slika neznanega avtorja iz poznega 15. st., ki jo hrani Galerija v Baltimoru



V popolni evklidski perspektivi je naslikano “idealno mesto”, resničnejše od same resničnosti, osvetljeno z vseprisotno, nezemsko lučjo, nekakšen arhitekturni “svet idej”, renesančni “Platonopolis”...

Leon Battista Alberti: arhitekt in likovni teoretik,
utemeljitelj renesančne estetike: lepota kot harmonija,
enotnost, skladnost in sorazmerje (proporc)

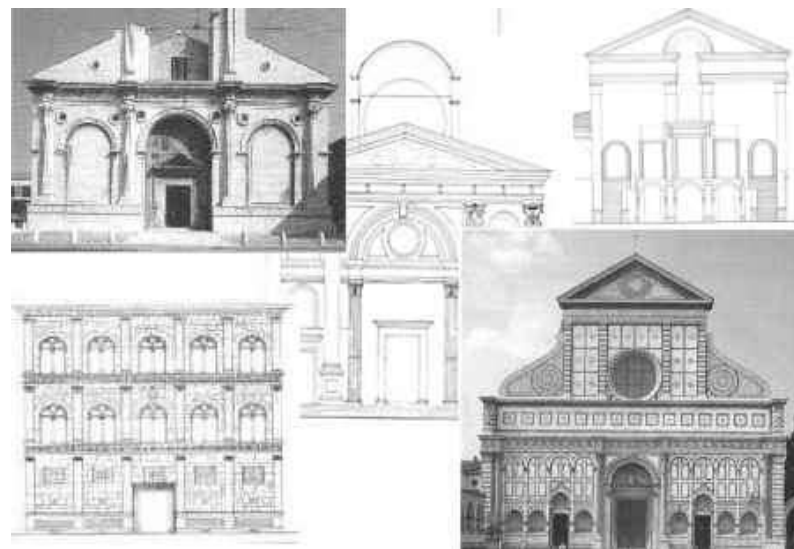
V knjigi *O arhitekturi (De re aedificatoria, 1452, dob. O stavbarstvu)* je Alberti definiral lepoto takole:

»Lepota je, povedano zelo na kratko, umirjena **concinnitas** [~ skladnost] med vsemi deli telesa oziroma skladna in popolna celota, ki bi jo skvarili z vsakim dodajanjem in odvzemanjem. Gre torej za pomembno, skorajda že božansko zadevo, ki zahteva od nas precejšnjo mero spretnosti in pameti, in lahko bi rekli, da celo narava kaj redko ustvari povsem skladno in v vseh pogledih popolno delo.«

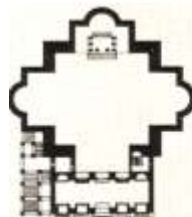
(Alberti, *O arhitekturi*, slov. prev. Tomaž Jurca, *Studia humanitatis*, 2007, str. 93.; gl. tudi zelo dobro spremno besedo Miklavža Komelja)

Leon Battista Alberti

(1404–1472)



Albertijeva arhitekturna dela – renesančna cerkev kot klasični tempelj



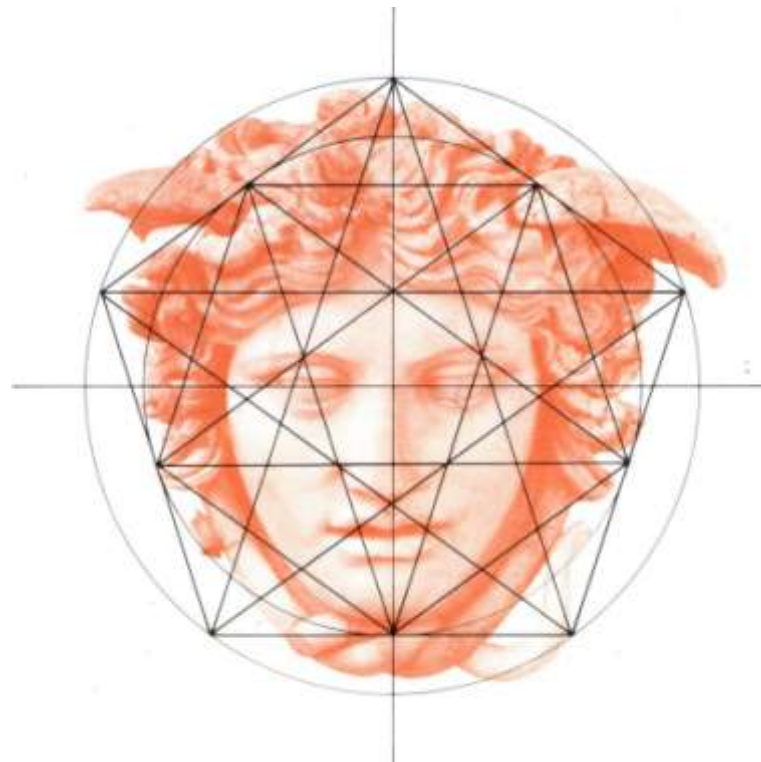
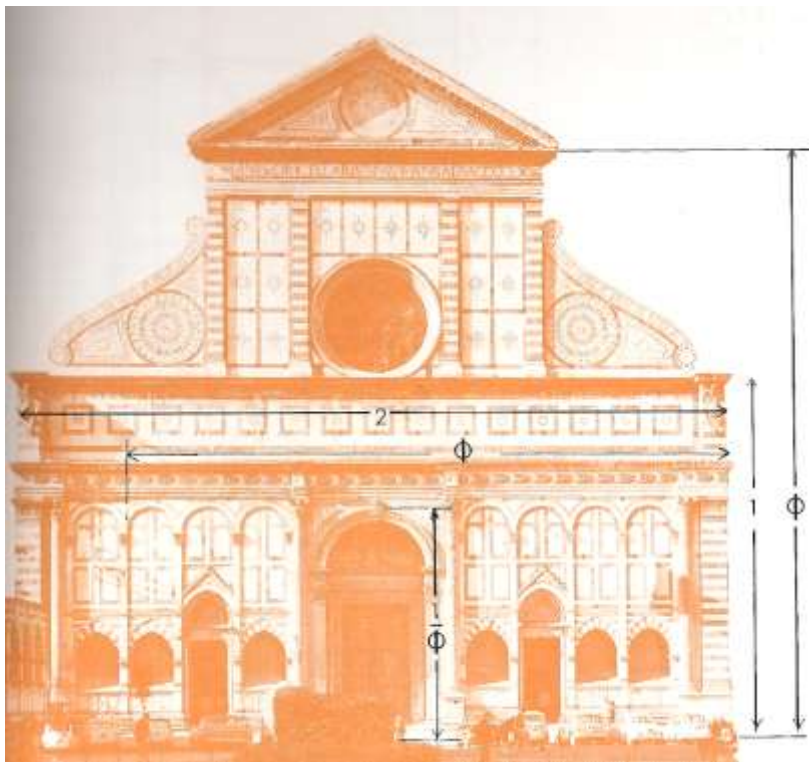
Na *levi sliki* je del fasade in vhod v cerkev *Tempio Malatestiano* v Riminiju, delo arhitekta Leona Battista Albertija (1450). Vladar Riminija Sigismondo Malatesta, po katerem je dobil ta "tempelj" ime, ga je dal zgraditi svojemu patronu sv. Sigismondu, v njem pa je bilo precej "poganskih" motivov (predvsem kipi), tako da ga je okregal sam papež, sicer zmerni in za renesanso zavzeti Pij II. (Piccolomini). Danes je cerkev posvečena sv. Frančišku.

Na *desni sliki* je notranjost cerkve sv. Sebastjana v Mantovi, prav tako Albertijevo delo, sredi 15. st.; iz tlorisa je razvidno, da gre za "centralno stavbo", značilno za bizantinski slog. Albertijev ideal je bila "čista", klasična arhitektura, in seveda ni naključje, da je oltar podoben majhnemu grškemu templju. Razpelo je od daleč komaj vidno, središčno je okroglo okno nad oltarjem, skozi katerega "božanska luč" emanira v notranjost tega renesančnega svetišča. Veliki polkrožni oboki pa nas spominjajo na nebesni svod.

Albertijeva fasada cerkve St. Maria Novella, Firenze



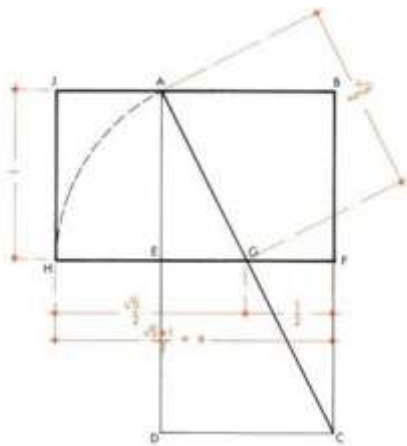
V renesansi so še posebej častili “zlati rez”



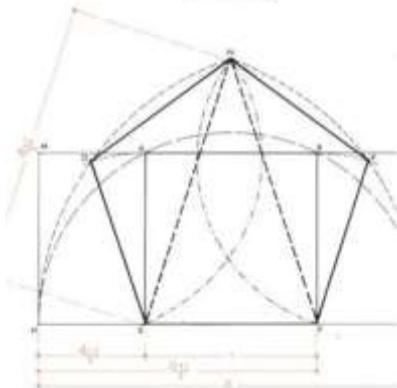
- Na *levi* sliki so označeni trije zlati rezi ($1 : \Phi$) na fasadi cerkve Santa Maria Novella v Firencah, ki jo je projektiral Leon Battista Alberti (15. st.).
- Na *desni* sliki je geometrijska analiza podobe Hermesa (ali Merkurja), grškega boga, po katerem se imenuje “hermetizem”; v enakostraničnem peterokotniku sta stranica in diagonala v razmerju zlatega reza.

(Obe sliki sta iz knjige: Robert Lawlor, *Sacred Geometry*, str. 53.)

Zlati rez



$$EN = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$



Skici sta iz knjige:
Robert Lawlor,
Sacred Geometry, 1994.

Zlati rez je vrsta “kontinuiranega proporca”.

Kaj je **proporc** (ali sorazmerje)? Proporc je razmerje dveh ali več razmerij, npr. $a : b = c : d$.

Kaj je **kontinuiran proporc**? To je proporc, pri katerem je drugi člen prvega razmerja enak prvemu členu drugega razmerja, npr. $a : b = b : c$.

Kaj je **zlati rez**? To je kontinuiran proporc, pri katerem je zadnji, tretji člen vsota prvega in drugega; zlati rez je torej razmerje med a in b (pri čemer naj bo $a < b$), če velja enačba:

$$a : b = b : (a + b),$$

in če izberemo $a = 1$ (enota), iz enačbe izračunamo število b

$$b = (\sqrt{5}+1)/2 = 1,61803\dots$$

Število $\sqrt{5}$, kvadratni koren števila 5, je “iracionalno” število (ni ulomek), zato je iracionalno število tudi $(\sqrt{5}+1)/2$, ki ga imenujemo “**zlatorezno**” število Φ .

Ali, drugače rečeno: če sta a in b daljici, sta v proporcju zlatega reza, če je njuno razmerje enako številu Φ .

Zlati rez lahko izrazimo še drugače: če hočemo dano enoto (1) “prerezati” z zlatim rezom na dva dela (označimo ju m in n), izračunamo, da znaša večji del reza $m = 1/\Phi \simeq 0,61803$ in manjši del reza $n = 1/\Phi^2 \simeq 0,38195$, kajti zgornjo enačbo lahko zapišemo tudi:

$$1/\Phi + 1/\Phi^2 = 1.$$

Geometrijski skici nam kažeta, kako z ravnilom in šestilom iz kvadrata (zgoraj) in/ali iz pravilnega peterokotnika (spodaj) s stranico dolžine 1 narišemo daljico, dolgo $(\sqrt{5}+1)/2$ oziroma Φ .

Zlatorezno število Φ je diagonala pravilnega peterokotnika s stranico 1.

Zlatorezno število Φ in Fibonaccijevo zaporedje



Morski polž *nautilus pompilius* je zvit v logaritemsko spiralo, ki se širi v proporciju zlatega reza oziroma Fibonaccijevih števil.

Johannes Kepler je dejal: “Geometrija ima dva velika zaklada: Pitagorov izrek in zlati rez.” (Robert Lawler, *Sacred Geometry*, str. 53.)

Zlatorezno število Φ ima zanimive aritmetične lastnosti:

$$1 + \Phi = \Phi \cdot \Phi = \Phi^2$$

$$\Phi + \Phi^2 = \Phi \cdot \Phi^2 = \Phi^3 \text{ itd.}$$

Obstaja tudi “misteriozna” povezava števila Φ s Fibonaccijevim zaporedjem (**Leonardo Fibonacci** iz Pise, 12. st.), ki ga dobimo tako, da je vsako naslednje število v zaporedju vsota prejšnjih dveh:

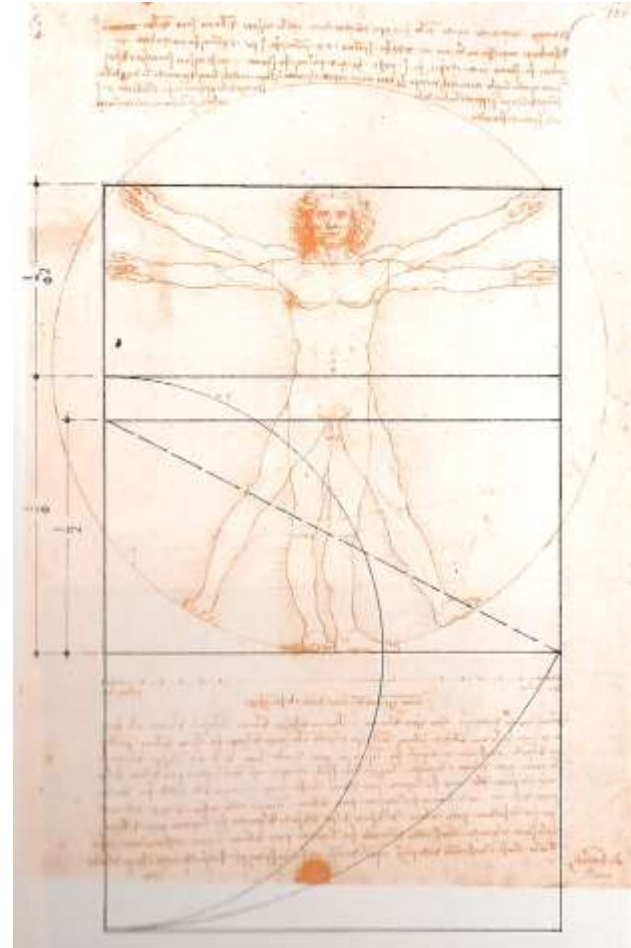
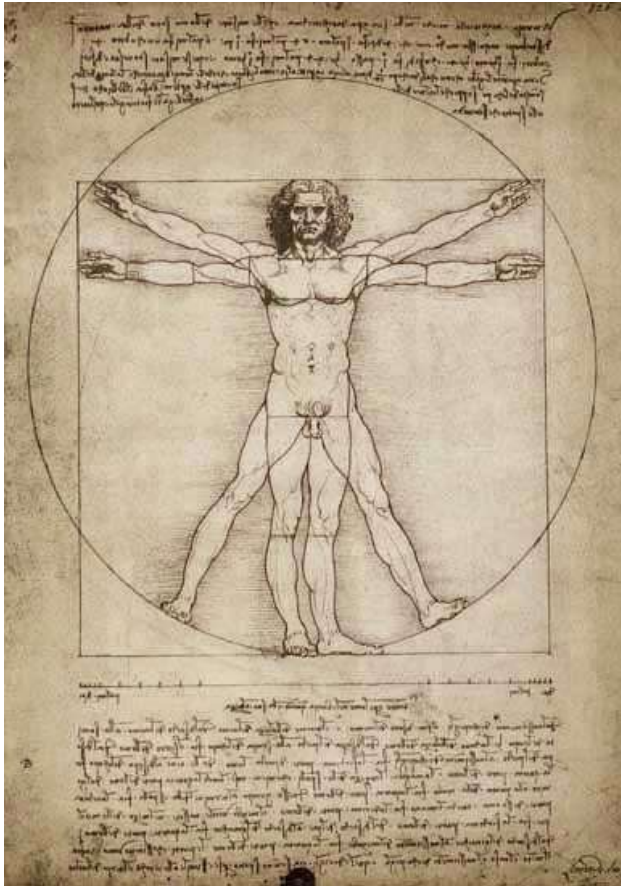
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ... Fibonaccijevo zaporedje.

Povezava je v tem, da se vrednost količnika med poljubnim številom v tem zaporedju in njegovim predhodnikom približno ujema s številom $\Phi = 1,618\dots$, tj., dokaj blizu se “vrti” okrog njegove vrednosti, “teži” k njej; npr., $21/13 = 1,615\dots$, $34/21 = 1,619\dots$, $55/34 = 1,617$ itd. –

Podobno kakor zlati rez na daljici lahko definiramo “**zlati kót**” na krožnici: $2\pi = 360^\circ$ razdelimo v razmerju: $\sim 137,5^\circ : 222,5^\circ$.

V naravi so mnoge strukture urejene v zlatem kotu, npr. polžje lupine; zlati kot je pomemben za razporeditev listov (*phyllotaxis*) okrog stebela ali v cvetovih (pogosto so medsebojno zasukani za $\sim 137,5^\circ$). Biologi razlagajo ta pojav z najboljšim evolucijskim izkoristkom (maksimalna rast), to pa je še en dokaz za poseben pomen zlatoreznega števila Φ .

Tudi v Leonardovem *Anthroposu* se skriva zlati rez ...



... saj popek "prereže" višino človeka v zlatem rezu.



Nikolajeva knjižnica
v rojstnem mestu
Kues (lat. Cusa)
v Nemčiji.

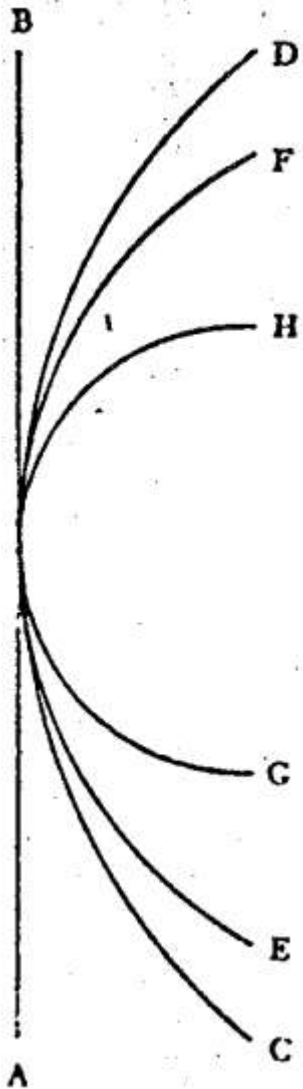
Nikolaj Kuzanski (1401-1464)



Nikolaj iz Cuse, najpomembnejši filozof na prehodu iz srednjega veka v renesanso, je v svojem glavnem delu *De docta ignorantia* (*O učeni nevednosti*, 1440, v treh knjigah) razvil misel, da so vse vidne in nevidne stvari povezane in da tudi nasprotja sovpadajo v Absolutu, čeprav to lahko spoznamo le deloma, zastrto, na “simbolem način”:

“Vsi naši najmodrejši in najbolj božanski učitelji se strinjajo v tem, da so vidne stvari resnično podobe <imagines> nevidnih in da je stvarnik na ta način omogočil ustvarjenim bitjem, da so jim [nevidne] dostopne v spoznavajočem pogledu kakor v zrcalu in uganki <quasi in speculo et in aenigmate>. To pa, da so duhovnosti <spiritualia>, ki so nam same po sebi nedostopne, prepoznavne simbolično <symbolice>, izvira iz zgoraj povedanega, namreč da so vse [stvari] med seboj povezane v nekem nam skritem in nedoumljivem sorazmerju <proportio>, tako da iz vseh vznikaja en univerzum in da so vse v enem največjem to samo eno.” (Nikolaj Kuzanski: *Učena nevednost*, I. knjiga, 11. pogl.)

Nikolaj Kuzanski: “sovpadanje nasprotij” (*coincidentia oppositorum*)



Kuzanski v skladu s svojim simbolnim mišljenjem ponazori sovpadanje nasprotij z matematičnimi (geometrijskimi) primeri. Najbolj znan je primer “sovpadanja” kroga in premice (tangente) v neskončnem “maksimumu” in/ali “minimumu” (gl. sliko na levi), ki ga razloži takole:

“... zato bo premica AB lok največjega kroga, od katerega ne more biti večjega. In tako vidimo, kako je najdaljša <maxima> in neskončna črta nujno najbolj prema, ki pa ji ukrivljenost ne nasprotuje, kajti ukrivljenost je v tej najdaljši črti enaka premosti <curvitas in ipsa maxima linea est rectitudo>.” (*De docta ignorantia*, I, 13)

Sovpadanje kroga in premice pa ima daljnosežne filozofske posledice:

“Vse to nam kaže, da je neskončni krog <circulus infinitus> večen brez začetka in konca, povsem in nedeljivo edinstven in vseobsežen. In ker je ta krog največji <maximus>, je tudi njegov premer največji. Ker pa ni možno, da bi bilo več največjih, zato je ta krog povsem edinstven, saj je njegov premer isti z obodom. Neskončni premer pa ima neskončno središče. Očitno je torej, da so središče, premer in obod isti. Naša [učena] nevednost iz tega uči, da je največje <maximum> nerazumljivo, ki mu najmanjše <minimum> ne nasprotuje. Kajti središče je obenem obod <sed centrum est in ipso circumferentia>.” (*Ibid.*, I, 21, podč. MU.)

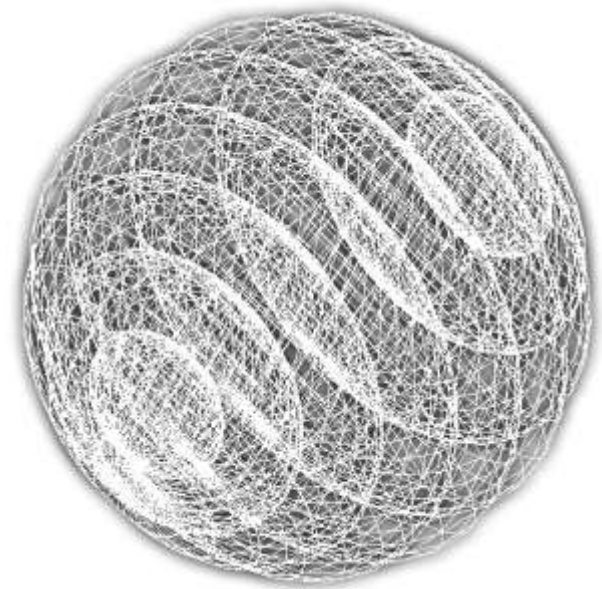
Kuzanski: “Prenos neskončne krogle na dejansko bivanje Boga”

“V neskončni krogli najdemo tri največje linije, linijo dolžine, širine in globine, ki se stekajo skupaj v središču. Središče največje krogle je istovetno premeru in obodu <*centrum maximae sphaerae aequatur diametro et circumferentiae*>. Torej so v neskončni krogli te tri linije identične s središčem.”

(*De docta ignorantia* I, 23, podč. M.U.)

Navezujoč se na hermetično formulo, da je Bog kakor “sfera, katere središče je povsod, obod nikjer” <*sphaera cuius centrum ubique, circumferentia nullibi*> – Kuzanski zapiše:

“Bog je torej edini absolutno enostavni temelj <*ratio*> celotnega univerzuma. In kakor iz neskončnega kroženja nastane krogla, tako je Bog kakor največja krogla najenostavnejša mera vsem kroženjem. [...] Največji mir je mera vseh gibanj, tako kakor je najbolj prisotna sedanost <*maxima praesentia*>, tj. večnost, mera vseh časov” (ibid., podč. M. U.).



Kuzanskijeva “neskončna sfera” ima, formalno gledano, podobno topologijo kot neevklidska, Riemannova *hipersfera* (19. st.), čeprav je slednja po volumnu končna – vendar brezmejna! Na sliki (s spleta) vidimo poskus nemogoče vizualizacije hipersfere v treh razsežnostih (3D): posamezni “krožni” preseki 4D-hipersfere so sfere oziroma krogle v 3D.

Preseganje geocentrizma: Kuzanski kot predhodnik Kopernika in Bruna

Bog je v Nikolajevem “simbolnem mišljenju” pojmovan/zamišljen “kakor sfera, katere središče je povsod, obod nikjer” – to pomeni, da je prisoten povsod, četudi ostaja duhovno “usrediščen” v sebi – medtem ko je univerzum, vesoljni prostor dejansko razsrediščen:

“Vesolje torej nima oboda; kajti, če bi imelo središče in obod, bi imelo samo v sebi svoj začetek in konec ter bi bilo omejeno glede na nekaj drugega; zunaj njega bi bilo nekaj drugega, tudi prostor – stvari, ki sploh niso resnične. Ker ga torej ni mogoče ujeti med telesno središče in obod, se vesolja, katerega središče in obod je Bog, ne dá spoznati.”

(*De docta ignorantia* II, 2)

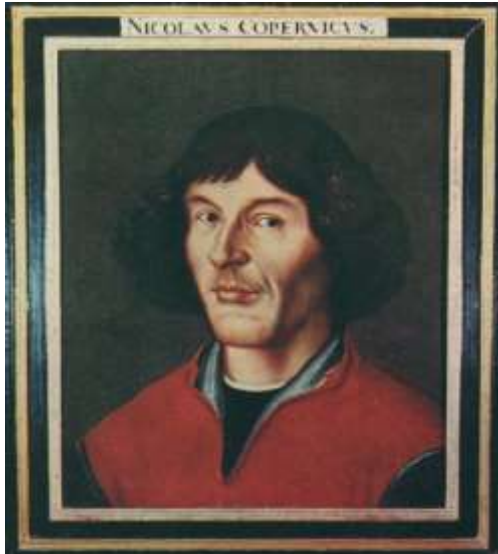
Za Kuzanca je pomembna distinkcija: vesolje je brezkrajno (*interminatum*, kar pomeni tudi: “nedokončano”), ne pa – tako kot Bog – neskončno (*infinitum*):

“... čeprav vesolje ni neskončno, si ga ne moremo predstavljati kot končno, ker nima meja, med katere bi bilo ujeta” (*ibid.*).



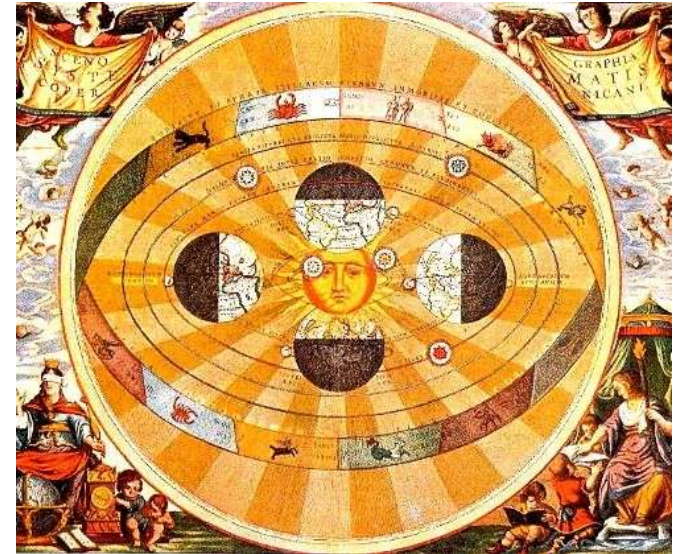
Kuzančevi astronomski instrumenti (1444): torkvet (v sredini), astrolab (pod tokrvetom desno) in dva nebesna globusa, leseni (levo) in bakreni (desno).

Kopernik: *De revolutionibus orbium caelestium* (1543):
Sonce je v središču kozmosa – obrat od geocentrizma k heliocentrizmu



Heliocentrični sistem, avtor barvne grafike je Mathis Nicani, 18. st.

Nikolaj Kopernik
(1473-1543)

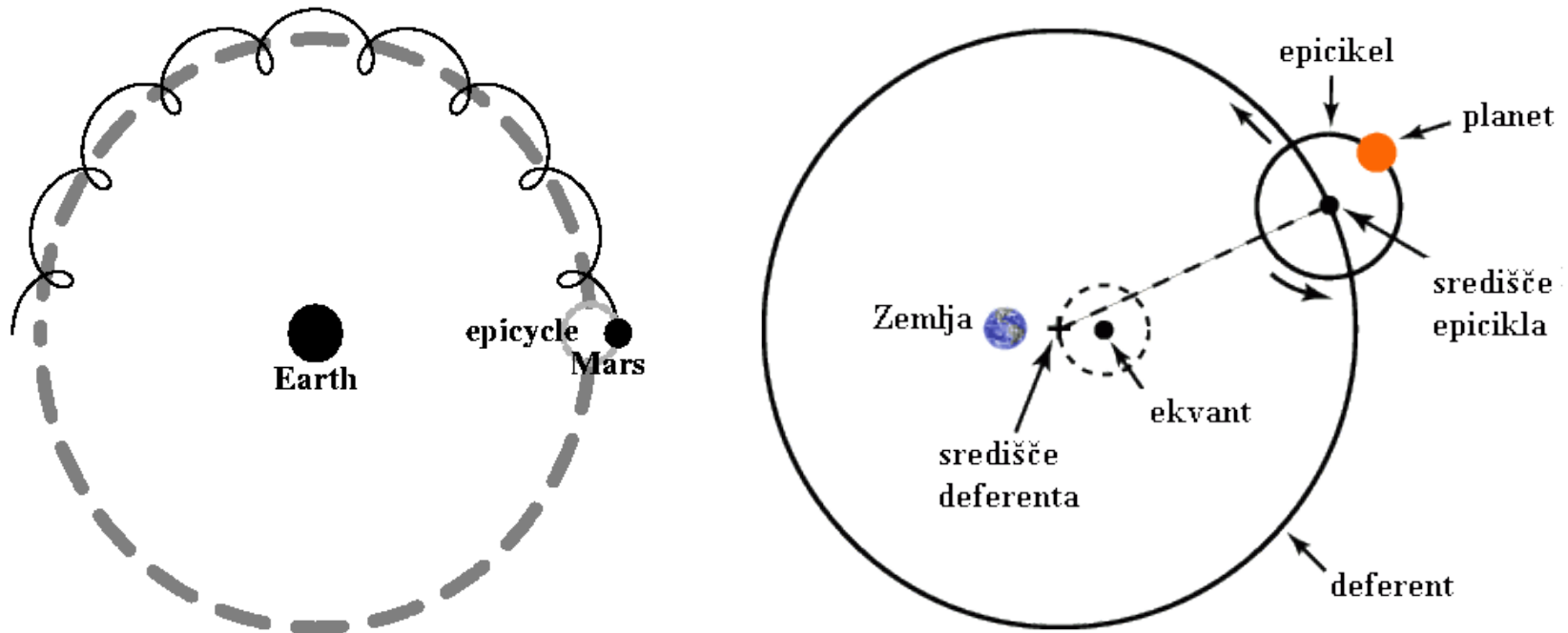


Kopernikov véliki obrat: v središču kozmosa je Sonce, ne več naša Zemlja – ki se vrti okrog Sonca (revolucija) in okrog svoje osi (rotacija). Za to takrat (in v nekem smislu še vedno) presenetljivo trditev je Kopernik navajal predvsem naslednja dva argumenta:

1. *logično-matematični argument*: naravo bolje razložimo z enostavnejšimi hipotezami (brez realnih “nebesnih sfer”, z manjšim številom fiktivnih krogov, tj. “epiciklov” idr.);
2. *metafizično-teološki argument*: kot je Platonova ideja Dobrega osrednja med vsemi idejami, tako je Sonce osrednje med vsemi nebesnimi telesi (sicer pa je že Pitagora učil, da je véliki Ogenj v središču kozmosa, podobno misel najdemo pri Heraklitu ...).

Vprašanje: Zakaj se je heliocentrizem uveljavil šele v renesansi, zakaj se ni že prej?

Ad Kopernikov logično-matematični argument:
zmanjšanje števila fiktivnih krogov pri razlagi gibanj planetov.

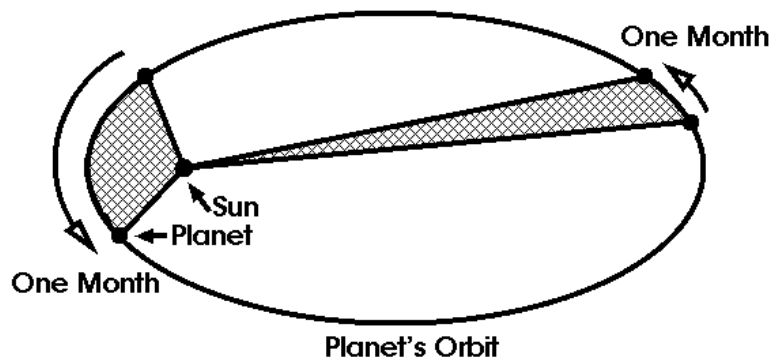


Na sliki so narisani ptolemajski krogi za pojasnitev “nepravilnega” gibanja planeta Marsa v geocentričnem sistemu: to gibanje naj bi bilo *sestavljeno iz več fiktivnih krožnih gibanj* (epicikel, deferent, ekvant). S Kopernikovim heliocentrizmom odpade večina teh fiktivnih krogov, ne pa vsi → povsem jih ukine šele Kepler, ki na začetku 17. st. uvede elipse namesto krogov.



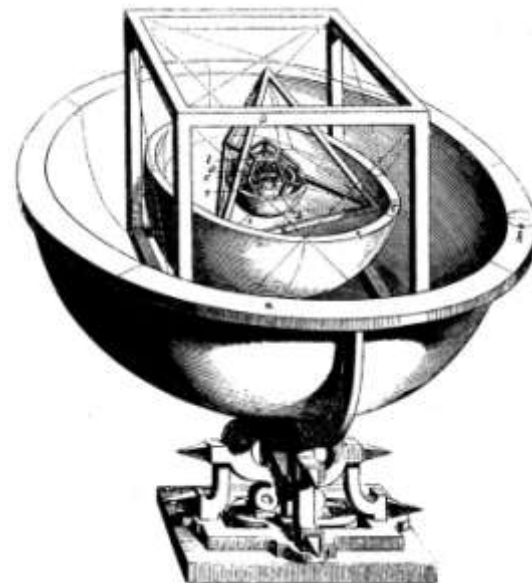
Gibanje planetov: opustitev krogov, uvedba elips

Johannes Kepler (1571-1630)



Na osnovi natančnih astronomskih merjenj, zlasti Marsa, ki jih je opravil njegov učitelj in predhodnik Tycho Brahe, je Kepler opisal kroženje planetov okrog Sonca z elipsami. Keplerjevi trije zakoni: 1609 prva dva in 1619 tretji (drugi zakon je ponazorjen *desno zgoraj*).

Vendar se je Kepler, ki je bil po filozofskem prepričanju platonik, težko poslovil od krogov, krogel in "idealnih platonskih teles" (*slika desno*). V zgodnjem delu *Mysterium cosmographicum* (1596) je z njimi poskušal razložiti planetne orbite.





Simbolna geometrija *Anthroposa*: krog in kvadrat

Leonardo Da Vinci

(1452–1519)

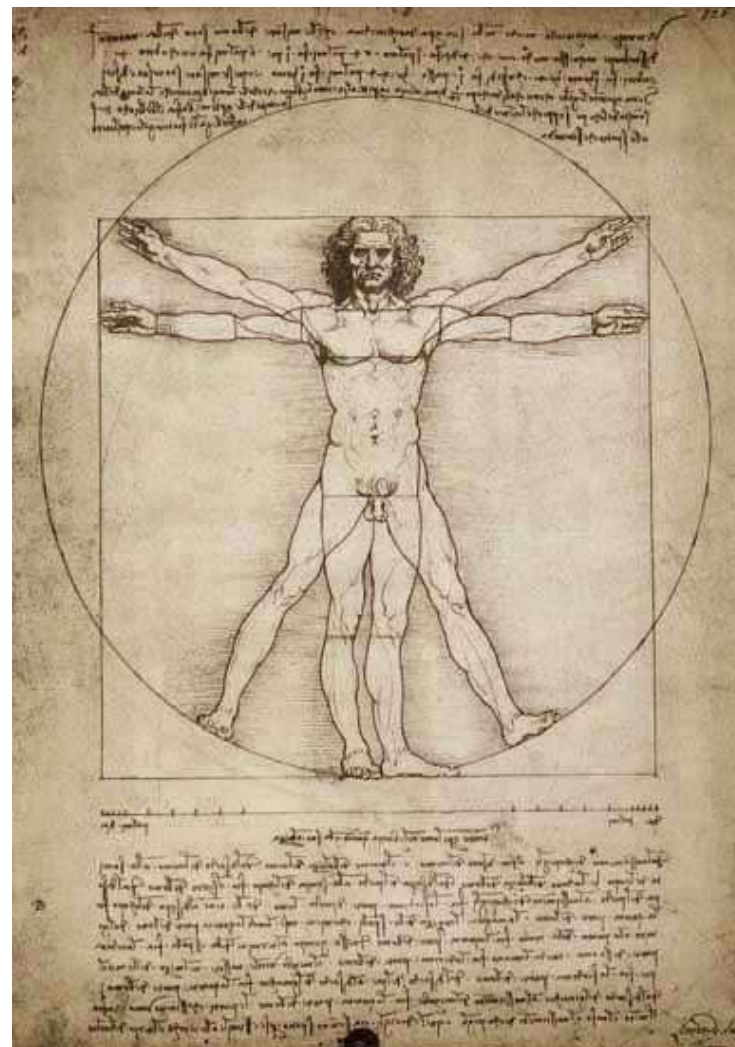
Traktat o slikarstvu se začne iz geometrijske točke:
»Točka je torej prvi začetek geometrije; in nič drugega ne more obstajati v naravi ali človeškem duhu, kar bi moglo dati začetek točki« (*Traktat*, 1).

Torej, iz točke nastanejo krog in kvadrat in vsi liki.

Slika: Človek v kvadratu in krogu je simbolno razpet med zemljo in nebom ter ju paradokсно povezuje.

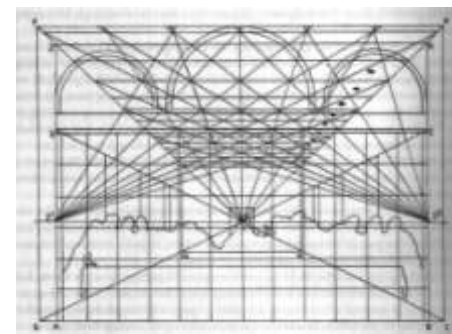
Ernst Cassirer v knjigi *Individuum in kozmos v renesančni filozofiji* (1927) obravnava Leonarda kot »posrednika« med renesančnim platonizmom, predvsem Kuzanskim (15. st.), in Galilejem (17. st.) kot utemeljiteljem novoveške znanosti:

»... domišljija vodi percepcijo in ji daje pomen, ostrino in določenost. Nedvomno je Leonardov ideal znanosti usmerjen ravno k popolnosti videnja, *saper vedere*. ... Pri Leonardu 'abstrakcija' in 'videnje' tesno sodelujeta.«



Človek v krogu in kvadratu je imenovan tudi "Vitruvijev človek" po rimskem arhitektu Vitruvijem (1. st.p.n.š.)

Leonardo da Vinci, *Zadnja večerja*, freska, Milano, 1497

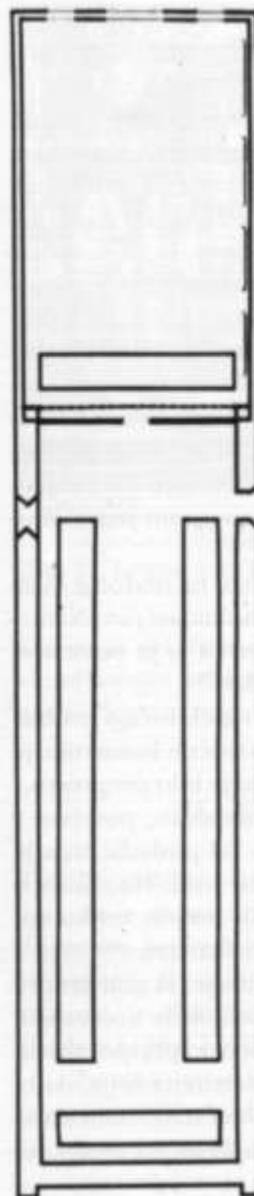


analiza perspektive na tej sliki

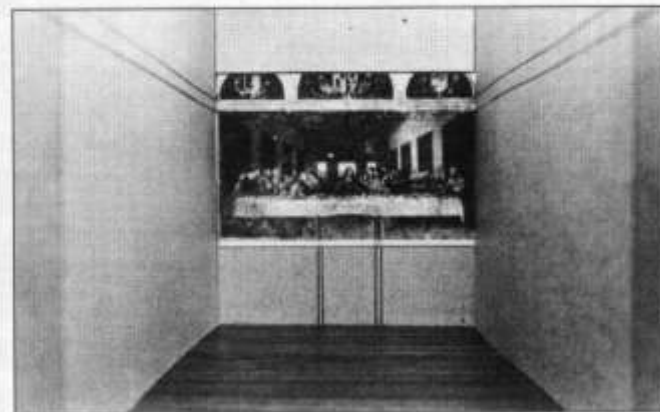
Neka druga Da Vincijeva “šifra”: perspektiva kot simbolna forma

Pozicija freske v refektoriju (jedilnici) samostana Santa Maria delle Gracie v Milanu: če gledamo od spodaj (sedeč pri mizi), se perspektiva ob prehodu iz dejanskega prostora dvorane v fiktivni prostor slike prelomi → simbolni pomen tega dogodka, poslednje večerje, evharistije: zemeljski *in* nebeški.

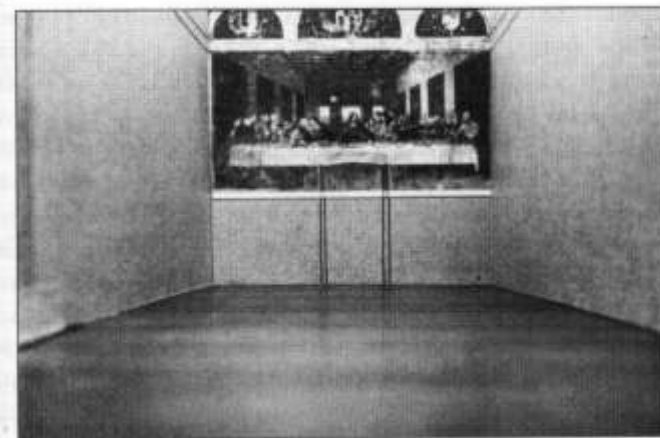
Iz knjige: Ernest Ženko, *Prostor in umetnost*,
Ljubljana, 2000, str. 69.



Slika 24: Tloris refektorija (jedilnice) samostana dominikanskih menihov, kjer je na *zgornji* steni Leonardova *Zadnja večerja*. Za fresko je prikazan naslikani (navidezni) prostor, ki je v nekem smislu nadaljevanje dejanskega prostora jedilnice.



Slika 25: Model jedilnice, pri kateri dejanski prostor prehaja neposredno v naslikani prostor. Opazovalec bi se nahajal na višini 4,5 m, na nivoju Kristusa in apostolov.



Slika 26: Pogled *od spodaj*, kjer je razvidno, da se *dejanski* prostor pri prehodu v *prostor slike* lomi.

Rafael Santi, "Atenska šola", 1511, Vatikanski muzej, Rim



Hvala za vašo pozornost!