Marko Uršič

Paradoksi transfinitne kozmologije

V problematiko kozmološke neskončnosti vstopimo s kratkim zgodovinskim pregledom pojmovanja neskončnosti, predvsem pri Aristotelu, Kantu in Cantorju. V drugem delu članka obravnamo vprašanje, ali je sodobna kozmologija razrešila prvo Kantovo antinomijo, tj., ali je (naše) vesolje končno ali neskončno v prostoru in času, pri čemer opozorimo na sodobno topologijo prostora-časa (torus ipd.). V tretjem delu članka uvedemo v razpravo multiverzum(e), povežemo metodologijo kozmoloških teorij multiverzumov z matematično teorijo množic ter ugotavljamo paradoksnost pojma »Multiverzum vseh multiverzumov«. V četrtem, zadnjem delu članka, obravnavamo Cantorjev »Absolut« kot možno filozofsko raz-rešitev paradoksov neskončnosti in ugotavljamo duhovno bližino tega prostopa s Kantovim pojmovanjem celote kot »regulativne ideje«.

Ključne besede: neskončnost, kozmologija, multiverzum, paradoks, antinomija, Kant, Cantor.

Zgodovina neskončnosti se v zahodnem mišljenju začenja z Grki, tako kot skoraj vse zgodovine naših idej; in že grški modreci so imeli ambivalenten odnos do neskončnosti, ki je za filozofijo in znanost značilen vse do dandanes. Anaksimander je v *apeironu* videl božansko prapočelo, Heraklit je govoril o neskončnem spreminjanju prvin, o večnem kroženju kozmosa, Zenon je odkril aporije neskončnosti ter z njimi dokazoval Parmenidovo enost in »sferično« končnost biti, Levkip in Demokrit sta prva govorila o neskončnem številu atomov in svetov v neskončnem prostoru – medtem ko je véliki Aristotel je zagovarjal in racionalno dokazoval prostorsko *končnost* vesolja (in obenem, zanimivo, predpostavljal neskončnost časa), pri čemer je uvedel za vso poznejšo zgodovino neskončnosti bistveno razlikovanje med *potencialno* (možno) in *aktualno* (dejansko) neskončnostjo: sprejemal je potencialno neskončnost dodajanja števil in »odvzemanja« oz. delitve daljic, vendar je odločno zavračal vsako dejansko neskončnost, tako matematično kakor fizično in metafizično. Za Aristotela je *regressus ad infinitum* logična napaka, ki je formalen izraz zmotnega mišljenja, da stvari nimajo konca – saj je bil stari Mojster prepričan, da so *stvari končne* (razen materije in časa, ki pa ni »stvar« in ne biva tako kot stvari), kajti »konec« vseh stvari, njihov *télos* (smoter) je v *umu*, ki v Aristotelovi metafiziki »misli samega sebe«, v fiziki pa je »prvo negibno gibalo«. Oba vélika grška klasika, Platon in Aristotel, sta se ujemala v misli, ki je z njima postala značilna za grškega duha, da popolnosti ni v neskončnosti, marveč v *končnosti,* in v skladu s tem vrednotenjem končnosti (uma, oblike nasproti snovi) Aristotel poudarja, da neskončnost ni dejanska (aktualna), ampak da »biva v možnosti« (tj. zgolj kot potencialna):

> »Neskončnost torej ne obstaja na drugačen način, na tak način pa obstaja: v možnosti in po odvzemanju [… in] tudi neskončno po dodajanju je neskončno v možnosti […]; vendar ni mogoče, da bi na tak način obstajalo čutno, zaznavno telo, ki bi bilo v dejanskosti neskončno […]. *Ne tisto, pri čemer ni nič zunaj, temveč tisto, pri čemer je vedno nekaj zunaj, to je neskončno.* […] Tisto pa, pri čemer ni nič zunaj, je popolno in celovito: tako namreč opredeljujemo celoto <*to holon*>: tisto, pri čemer ni nič odsotnega […]. *Celota je tisto, pri čemer ni nič zunaj.*« (Aristotel, *Fizika*: III/6, 206a isl., poudaril avt.)

Celovita, popolna, končna, »smotrna« je oblika, bistvo stvari <*morphé*, *eídos*>, neskončnost pa je snov <*hýle*>, ki je vselej le »celota v možnosti, ni pa celota v dejanskosti« (Aristotel, *ibid*.). S tega stališča je tudi čas, ki je po Aristotelu neskončen, tj. brez začetka in konca, možnost in/ali moč <*dýnamis*> udejanjenja, namreč nastajanja in minevanja stvari. (V tej misli vendarle prepoznamo Platonov vpliv na Aristotela: pri Platonu je čas kot »podoba večnosti« *možnost* večnosti, če se um povzpne od podobe k ideji.) Čas in neskončnost sta pri Aristotelu tesno prepletena in v *neskončnem* času se po »načelu polnosti« lahko udejanjijo *vse* možnosti. A. W. Moore v knjigi z naslovom *Neskončno* (*The Infinite*, 1990) pravi, da je treba Aristotelovo »distinkcijo [med aktualno in potencialno neskončnostjo] misliti v bistveno časovnem smislu. Aktualno neskončno je tisto, česar neskončnost obstaja ali je dana v nekem trenutku *v* času. Potencialno neskončno pa je to, česar neskončnost obstaja ali je dana *preko* časa: nikoli ni celovito prisotno« (Moore: 40). Ker pa ni nobena stvar dana kot celota »v času« (v trenutku, intervalu), ampak je celota stvari vselej dana »preko časa«, zato potencialna neskončnost nikoli ne more postati aktualna – aristotelsko rečeno, aktualne neskončnosti ni med »bivajočimi stvarmi«. Ali, če misel obrnemo, pri Aristotelu je sáma možnost (oz. nemožnost) stvari bistveno povezana s časom: nekaj je možno, če je (je bilo, bo) udejanjeno v *nekem* času; in če je čas potencialno neskončen, je možno prav *vse* (v sodobni modalni semantiki pa se namesto o »časih« govori o »možnih svetovih«, namesto kronologije nastopi topologija). Po Aristotelu so števila potencialno neskončna, ker je proces »dodajanja« neomejen, saj vedno ostaja neko število, ki je »zunaj« že preštetih; daljice so potencialno neskončno deljive, ker je proces »odvzemanja« (*cf*. velikosti) neomejen – torej gre pri pojmu neskončnosti za neskončen *proces*, zmuzljiva

»substanca« vseh procesov pa je *čas*, ki je za človeško zavest vselej končen, »delen«, »necel«.[1]

Moore sugerira bližino Aristotelovega in Kantovega pojmovanja neskončnosti, namreč kritiko aktualne neskončnosti, celote (časa), ko pravi, da je bil Aristotelov predlog v osnovi takšen: »Nobenega ugovora ni proti temu, da bi bilo nekaj neskončno, toda le tedaj, če njegova neskončnost ni tu [ne biva] 'vsa hkrati' <*provided that its infinitude is not there 'all at once'*>« (*ibid*.: 39). Kant je sprejemal celoto časa in prostora le kot regulativno idejo, kritiziral pa jo je kot spekulativno kozmološko kategorijo, ker sega preko vsega možnega izkustva in zato vodi v antinomijo; analogno kakor pri Aristotelu, se tudi pri Kantu ohranja neskončnost le kot »potencialna« ideja, kajti, »kolikor daleč pač lahko pridem v tej rastoči vrsti [prostorov in časov], vsakokrat se moram vprašati še po enem višjem členu vrste, če mi je izkustveno znan ali ne« (Kant, *Kritiki čistega uma*: B 546). Neskončnost je dragocena za um, za duha, še več, nujna je za njegovo bistvo, svobodo, toda razum je ne sme nekritično izrabljati, ampak se mora vselej zavedati, da so človeške misli »zasidrane« v *končni* domeni časa in prostora; končnost pa je dragocena za razum, v njej je razumsko spoznanje sploh šele mogoče, kajti iz končnosti se dviga tudi tedaj, ko sega k potencialni neskončnosti, v »odprt prostor možnosti«, in to razum vseskozi počne. Tudi pozni Wittgenstein je pri kritiki aktualne neskončnosti, ki jo je usmeril predvsem na Cantorjevo transfinitno matematiko, sledil Aristotelovi in Kantovi tradiciji – kot povzema Moore: »Verjel je, da je pravilna uporaba takšnih izrazov, kot je 'neskončnost', potrebna za označitev oblike končnih stvari in, kar je s tem povezano, za posplošitev neskončnih možnosti, ki jih končne stvari premorejo« (Moore: 137); v sklepnem poglavju knjige *Neskončno*, pod naslovom »Človeška končnost«, pa Moore k temu lepo dodaja: »Stvari premorejo neskončne možnosti. In to lahko vidim. Toda to vidim v njihovi obliki. Možnosti niso

[1] Pri aristotelski soodvisnosti neskončnosti in časa pa ostaja nerešen problem anizotropije časa (usmerjenosti od preteklosti k prihodnosti), namreč glede razlikovanja med možnim in dejanskim: preteklost se nam kaže kot dejanska, prihodnost kot možna (spomnimo se slavne Aristotelove »pomorske bitke« in problema prihodnjih kontingenc). Epistemološki, najbrž pa tudi ontološki status potencialne neskončnosti ni enak v prihodnosti in v preteklosti. A. W. Moore ponazarja to intuitivno asimetrijo s primerom, ki ga je našel pri Wittgensteinu: »Wittgenstein je na nekem predavanju predlagal slušateljem, naj si predstavljajo človeka, ki pride in reče: '… 5, 1, 4, 1, 3 – konec!', in ko ga vprašajo, kaj je pravzaprav počel, jim odvrne, da je ravnokar končal recitacijo celotnega decimalnega razvitja števila π v nasprotni smeri – nekaj, kar je počel v enakomernem ritmu vso preteklo večnost. Ta zgodba nam vzbuja vtis absurdnosti na nek poseben način, ki ga ne bi vzbujala simetrična zgodba o človeku, ki bi začel recitirati celotno decimalno razvitje števila π v 'pravi' smeri in bi to počel vso prihodnjo večnost. (Zanimivo bi bilo slišati, kaj bi Aristotel rekel k temu.)« (Moore: 44).

nikoli postavljene pred moj pogled v njihovi neskončni celovitosti« (*ibid.*: 221).

V nadaljnjem razvoju filozofije in znanosti, v stoletjih in tisočletjih po Aristotelu, so se oblikovali trije glavni pomeni neskončnosti: matematičen, fizičen in metafizičen. Pojem *metafizične* (ali teološke) neskončnosti se je razvil na zahodu predvsem v judovsko-krščanski filozofiji in/ali teologiji: Bog je neskončen v vseh svojih atributih, v vseh svojih popolnostih <*perfectiones*>: je neskončno dober, neskončno mogočen, neskončno usmiljen, neskončno vseveden itd., pri čemer se nam zdi, da vse božje »perfekcije« niso konsistentne, zato ima racionalna teologija kar precej dela z njimi. V bolj mističnih ali »negativnih teologijah«, na primer pri Dioniziju Areopagitu ali (spet drugače) pri Nikolaju Kuzanskem, je božja neskončnost tista najvišja, presežna »točka«, v kateri vsa nasprotja, celo vsa protislovja »sovpadejo«. Vsekakor pa je ena izmed bistvenih razlik med grško filozofijo in monoteističnimi religijami v tem, da v slednjih nastopa neskončnost, namreč metafizična oziroma teološka *aktualna* neskončnost, kot *popolnost*, medtem ko je bila, kot smo že rekli, pri grških klasikih popolnost izrazito končna. Kar pa zadeva *fizično* (ali fizikalno, če poudarjamo teoretski vidik) aktualno neskončnost, so jo večinoma zavračali tako antični kot krščanski misleci, tudi zato, ker je bila misel, da je svet (kozmos) neskončen, vselej blizu materializmu in ateizmu ali panteizmu: Demokrit se je ob tej svoji misli smejal, Lukrecij je o njej skoval mnogo lepih stihov, Bruno je z njo zgorel na grmadi, Spinozo pa so (tudi) zaradi nje izobčili iz cerkvene skupnosti. Newton je bil glede neskončnosti vesolja previden, sicer ne več zaradi grmade, ampak predvsem zaradi svojega načela *hypotheses non fingo*, in zato je v slavni korespondenci s teologom Richardom Bentleyjem, ki ga je mdr. spraševal, kako to, da zaradi univerzalne gravitacije svetovi ne padejo skupaj, odgovarjal, češ da so v »ravnotežju«, ker so dovolj daleč narazen in enakomerno razporejeni po prostoru, ne pa zato, ker bi bil vesoljni prostor neskončen (čeprav je Newton pojmoval absolutni prostor kot »božji senzorij«).[2]

---

[2] Proti fizični neskončnosti vesolja je govoril tudi »Olbersov paradoks« – problem, ki ni ga odkril šele Heinrich Olbers leta 1826, ampak že Edmond Halley dobro stoletje prej; gre za vprašanje, zakaj je nebo ponoči temno – kajti, če bi bilo vesolje neskončno in vsepovsod posejano z zvezdami, bi bila vsota vseh sijev zvezd tolikšna, da bi bilo celotno nebo bleščeče kot Sončeva ploskev; ta »paradoks« se je razrešil šele v 20. st. z odkritjem raztezanja vesolja, s katerim se zmanjšujejo frekvence svetlobnih valov, ki se vse bolj premikajo proti rdečemu delu spektra in nazadnje se valovi popolnoma »izravnajo«, tako da zvezde in galaksije »ugasnejo« v vidnem polju daljnega opazovalca.

Kant, ki je bil že v svojem »predkritičnem« obdobju zavzet privrženec Newtonove filozofije narave, je v *Kritiki čistega uma* združil kritično refleksijo matematične, fizične in metafizične aktualne neskončnosti; toda podobno, kot se je uštel v prepričanju o apriornosti evklidske geometrije, se je (vsaj deloma) motil tudi glede matematične aktualne neskončnosti – kakih sto let pozneje jo je namreč odkril Georg Cantor, in od tedaj glede neskončnosti lahko rečemo, da ni »nič več tako, kot je bilo poprej«. Bistven prelom paradigme pri pojmovanju neskončnosti, ki je Cantorju omogočil uvedbo matematične aktualne neskončnosti, je v misli, da *neskončnost ni neločljivo povezana s časom* (s procesi v času, štetjem, deljenjem ipd.), kakor je bila pri Aristotelu in Kantu. Cantor v razpravi »O neskončni linearni množici točk« (*Űber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 1879-84),[3] v § 10, kjer opredeljuje pojem neskončnosti kontinuuma, pravi:

> »Najprej naj pojasnim, da po mojem mnenju ni primerno, da v obravnavo tega [matematičnega] dosti izvirnejšega in splošnejšega pojma kontinuuma pritegnemo *pojem* ali *zrenje časa*; čas je po mojem neka predstava, ki jo pojasnimo natančno tako, da predpostavimo od nje neodvisen pojem kontinuitete. Zato s tem pojmom časa ne moremo pojmovati niti objektivno, kot kako substanco, niti subjektivno, kot kako apriorno nujno formo zrenja. Čas ni nič drugega kot *pomožni* ali *relacijski pojem*, s katerim ugotavljamo različna gibanja, ki jih zaznamo v naravi.« (Cantor: 37)

Cantor se s svojim pojmovanem časa postavlja ne le nasproti Aristotelu, ampak tudi nasproti Newtonu in Kantu; v tem pogledu mu je še najbližji Leibniz z relacijsko teorijo časa, a tudi z njim polemizira glede pojmovanja realne neskončnosti, saj jo Leibniz zavrača podobno kot Aristotel.[4] Nadalje

[3] Razprava obsega šest sestavkov, v slov. je preveden peti (gl. Literaturo) iz leta 1883, ko je izšla tudi Cantorjeva glavna monografija o teoriji množic *Temelji splošnega nauka o mnogoterostih* (*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*). Cantor v opombi k petemu sestavku navedene razprave opredeli pojem *Mannigfaltigkeit* takole: »S pojmom mnogoterost ali množica <*Menge*> razumem v splošnem vsako mnoštvo, ki ga lahko mislimo kot eno, to pomeni, vsak pojmovni obseg določenih elementov, ki ga lahko po nekem pravilu povežemo v celoto« (Cantor: 7).

[4] Zanimivi so Cantorjevi argumenti proti Aristotelovemu zavračanju aktualne neskončnosti. Takole pravi: »Kot je znano, so v srednjem veku vsi sholastiki zagovarjali izrek *infinitum actu non datur* [dejansko neskončno ni dano] kot neovrgljivo resnico, ki so jo prevzeli od Aristotela. Toda če si ogledamo razloge, ki jih Aristotel navaja zoper dejanski obstoj neskončnega (prim. med drugim 11. knjigo njegove *Metafizike*, pogl. 10), potem vidimo, da jih lahko zvedemo na predpostavko, ki vsebuje *petitio principii*; se pravi na predpostavko, da obstajajo le končna števila, kar Aristotel sklepa iz dejstva, da je bilo njemu poznano le štetje s končnimi množicami« (Cantor: 17). Nadalje Cantor zavrača Aristotelovo bojazen, da bi neskončno, če bi dejansko obstajalo, »uničilo« vse končno, ker naj bi bilo »tudi končno število domnevno uničeno z neskončnim številom« (*ibid.*: 18); ne, pravi Cantor, saj »je mogoče nekemu neskončnemu številu, ki si ga

Cantor analogno meni, da »pri pojasnitvi *kontinuuma* ne bi smeli začeti s t. i. *prostorskimi formami zrenja*«, tako da mu, kot sam pravi, ne preostane nič drugega, kot da poskuša »s pomočjo [že prej] definiranega pojma realnega števila izdelati neki, kot je le mogoče splošen, čisto matematični pojem točkastega kontinuuma« (Cantor: 37-38).[5] – Očitno gre torej za razvezo med neskončnostjo kontinuuma in časom, in ravno ta razveza Cantorju omogoča vpeljavo »prave« (aktualne) matematične neskončnosti kot nadgradnjo dotlej splošno sprejete »neprave« (potencialne) neskončnosti ter jo »matematično fiksirati v določeni obliki dovršeno neskončnega« (*ibid*.: 18), tj. uvesti *transfinitna števila* in operacije z njimi, transfinitno aritmetiko.[6]

Cantorjeva uvedba ordinalnih in kardinalnih transfinitnih števil ter njihove aritmetike izhaja iz njegovega temeljnega in najbolj presenetljivega odkritja, da obstajajo *različne neskončne* mnogoterosti <*Mannigfaltigkeiten*>, neskončne množice z različnimi »redi« in »močmi«. Ordinalno število izraža red <lat. *ordo*> oz. »dolžino« neke številčne vrste, če je vrsta »dobro urejena«; najmanjše transfinitno ordinalno število, ki ga je Cantor označil z ω, je red oz. dolžina »števne neskončnosti« (naravnih števil, lihih števil, sodih števil, praštevil, … in racionalnih števil oz. ulomkov, ki jih je tudi mogoče »preslikati« na naravna števila); ordinal ω *sledi* celotni vrsti naravnih števil (oz. »največjemu« naravnemu številu, ki pa sámo seveda ne obstaja), ordinalu ω sledi novi ordinal ω+1 itd.

---

zamislimo kot določeno in dovršeno, *zlahka* dodati neko končno število …« (*ibid*.) – npr. ordinalnemu številu števne neskončnosti ω dodamo enico in dobimo ω+1.

[5] Opozoriti velja, da Cantor – čeprav se je pri matematični definiciji kontinuuma intuitivno opiral na »*točkasti* kontinuum« (tj. na neskončno množico točk, in sicer ne le na neskončni premici, ampak tudi na vsaki končni daljici) – svoje transfinitne aritmetike ni razvil v smeri »najmanjšega«, ampak zgolj v smeri »največjega«, še več, izrekal se je *proti* »neskončno majhnim številom«, kar je lepo razvidno iz naslednjega pasusa, v katerem se navezuje na zelo koristno uporabo »neprave« (aristotelsko rečeno, »potencialne«) neskončnosti v infinitezimalni analizi in v teoriji funkcij: »[Matematiki] pa so morali končno opustiti vse poskuse, da bi to neskončno majhno naredili enakovredno pravemu neskončnemu. Če prave neskončno majhne velikosti sploh obstajajo, tj., če jih sploh lahko definiramo, potem zagotovo niso neposredno povezane z navadnimi velikostmi, ki lahko *postanejo* neskončno majhne« (Cantor: 15). Toda neskončno majhna števila (»infinitezimali«) so bila pozneje vendarle vpeljana v matematiko z »nestandardno analizo« (Abraham Robinson, 1962).

[6] Nekateri pomembni matematiki v 20. st. pa so vendarle ohranili in posodobili aristotelsko »časovno« pojmovanje neskončnosti, najbolj izrazito pripadniki matematičnega »intuicionizma«, ki dandanes velja za eno izmed glavnih alternativ v filozofiji matematike. Moore ugotavlja, da je za Luitzena Brouwerja, utemeljitelja intuicionizma, neskončnost tudi po Cantorju ostala »nekaj, kar mora biti dano, ali bolje rečeno, konstruirano v času <*over time*>. Njeno bivanje je potencialno, nikoli aktualno« (Moore: 132).

(Aritmetika transfinitnih ordinalov je drugačna od finitnih, v njej npr. ne velja zakon komutativnosti, tako da $\omega+1 \neq 1+\omega$.) Moč množice, tj. število elementov, ki jih vsebuje, pa izraža njeno kardinalno število; za nas smrtnike sta najpomembnejša prva dva transfinitna kardinala, moč številne neskončnosti »Alef-0« ($\aleph_0$) in kontinuuma »Alef-1« ($\aleph_1$).[7] Cantor je dokazal s svojim znamenitim »diagonalnim dokazom« (leta 1891, že prej pa na druge načine) *razliko* med njima, namreč da je $\aleph_1$ *močnejša* (večja po številu elementov) množica od $\aleph_0$,[8] – toda ta dva začetna neskončna kardinala sta šele »prva vratarja« (prosto po Franzu Kafki) neskončne vrste neskončnosti, kajti v Cantorjevem »matematičnem paradižu«, kot ga je imenoval David Hilbert, je *neskončno* mnogo različnih, hierarhično razvrščenih *neskončnosti*. V tem je »matematično veselje do spekulacije« (Cantor: 16), gre za »svobodno matematiko«, neodvisno od (meta)fizične realnosti, »[k]ajti *bistvo matematike* je prav v njeni *svobodi*« (*ibid*.: 27).[9]

---

[7] O bibličnem in kabalističnem izvoru Cantorjevega poimenovanja neskončnosti gl. zanimivo knjigo: Amir Aczel, *The Mystery of the Aleph* (2000).

[8] Razliko med »gostoto« racionalnih števil oz. ulomkov (med dvema ulomkoma vselej obstaja še en ulomek, *ad infinitum*) in »zveznostjo« oz. kontinuumom realnih števil, ki so tudi »gosta«, vendar zanje še dodatno velja, da med njimi ni »vrzeli« – je prvi ugotovil Richard Dedekind, s katerim se je Cantor dopisoval. Cantor je to razliko odkril znova, neodvisno od Dedekinda, ter ugotovil, da je neskončnost kontinuuma »potenčna množica« števne neskončnosti $\aleph_0$ (tj. množica vseh njenih podmnožic, katere moč se izračuna s preprosto formulo: $2^{\aleph_0}$, tj. 2 na potenco $\aleph_0$). Cantor je nadalje postavil znamenito, a še vedno nedokazano »hipotezo kontinuuma« (hyp-C), ki pravi, da med $\aleph_1$ kot potenčno množico množice $\aleph_0$ ni nobenega drugega kardinalnega števila, tj. nobene vmesne neskončnosti (gl. npr. Moore: 154). V Zermelo-Fraenklovem sistemu je (hyp-C) neodločljiva (Kurt Gödel je leta 1939 dokazal, da se je v ZF-sistemu ne da ovreči, Paul Cohen pa leta 1963, da se je ne da dokazati); zanimivo pa je, da je bil Gödel kot »matematični platonist« prepričan, da je (hyp-C) napačna in da je torej treba zgraditi močnejši sistem teorije množic, da bi jo ovrgli (gl. Smullyan: 172-74).

[9] Cantorjevo odkritje transfinitnih števil in njihove čudežne aritmetike pa se nekaterim njegovim vplivnim sodobnikom ni zdelo ravno odkritje kakega »matematičnega paradiža«. Poleg njegovega nekdanjega profesorja Leopolda Kroneckerja (v zgodovino matematike se je zapisal kot radikalni »finitist« z izjavo, da je Bog ustvaril naravna števila, vsa druga pa so človeško delo), ki je Cantorju dobesedno zagrenil življenje, ker mu je onemogočal objavljanje člankov in akademsko napredovanje ter s tem znatno prispeval h Cantorjevemu prvemu duševnemu zlomu (1884) – pa med skeptiki do transfinitne aritmetike najdemo tudi, malce presenetljivo, znanega francoskega matematika in filozofa Henrija Poincaréja, ki je baje rekel, da je »teorija množic bolezen, ki je okužila matematiko in katero bi bilo treba sčasoma ozdraviti« (gl. Clegg: 153). Tudi Hilbert je bil pozneje (v '20.-ih letih) zadržan do Cantorjeve aktualne neskončnosti, njegov zmerni finitizem se je približal (novo)kantovskemu odnosu do neskončnosti. Moore navaja Hilbertove besede: »Neskončno ni nikjer realizirano; ni niti prisotno v naravi niti sprejemljivo kot osnova našega racionalnega mišljenja […]. Vloga, ki neskončnemu preostaja, je predvsem ta, da je zgolj Ideja, če v skladu s Kantovimi besedami razumemo Idejo kot umski pojem, ki presega vse izkustvo in s

Ali je sodobna kozmologija razrešila prvo Kantovo antinomijo?

V nadaljevanju tega članka bomo videli, da obstaja zanimiva pojmovna povezava med transfinitno teorijo množic in kozmološkimi teorijami multiverzumov (»transfinitno kozmologijo«), vendar se moramo pred tem vrniti nekoliko nazaj in poskusiti odgovoriti na klasično vprašanje o fizični (vesoljni) neskončnosti: je *naše* Vesolje končno ali neskončno v prostoru in času? Ali lahko sodobna kozmologija razreši oziroma preseže Kantovo antinomijo? Najprej lahko ugotovimo, da je prva Kantova kozmološka antinomija končnosti nasproti neskončnosti prostora in časa izgubila svojo prvotno ostrino z odkritjem neevklidskih geometrij in njihovo uporabo za opis realnega, fizičnega vesolja v Einsteinovi relativnostni teoriji (gravitacija je ukrivljenost prostora-časa). Einsteinov prvi, še *statični* kozmološki model (1917) je bil *končen* in obenem *brezmejen*, opisan z Riemannovo geometrijo sferičnega prostora (tj. kot »hipersfera«); v nekem smislu je bil s tem modelom v kozmologiji »ponovno oživljen finitizem« (Kanitscheider: 156). Toda kmalu zatem, v '20.-ih letih minulega stoletja, je bil Einsteinov statični model (s kozmološko konstanto Λ) presežen zaradi Hubblovega odkritja raztezanja vesolja, zamenjali so ga Friedmannovi *dinamični* modeli, pozneje imenovani FRW-modeli,[10] v katerih se vesoljni prostor, opisan z Einsteinovi relativističnimi enačbami gravitacijskega polja, razteza oziroma razvija v kozmološkem *času* (gl. Uršič, 2002: 538 isl.). Ob predpostavki globalno homogenega prostora, podprti z izotropijo neba (prasevanja) in apriornim »kozmološkim načelom«, so ostali skoraj vse do konca minulega stoletja v igri trije glavni FRW-modeli, opisani s sferično, evklidsko (ali »ravno«) in hiperbolično geometrijo, pri izboru med njimi pa so (bile) meritve najbolj naklonjene evklidskemu vesolju, v katerem je povprečna gostota vse snovi in/ali energije enaka kritični vrednosti (torej je njuno razmerje $\Omega = 1$), ali vsaj blizu njej ($\Omega \approx 1$, v tem

---

katerim je to, kar je konkretno, dopolnjeno tako, da oblikuje celost« (gl. Moore: 135). – Hilbertov odnos do neskončnosti je bil torej ambivalenten (podobno kot že Aristotelov in Kantov), kar nam nazorno pokaže tudi znana zgodbica o »Hotelu Neskončnost«, ki mu jo pripisujejo, čeprav jo je (najbrž prvi) zapisal ameriški kozmolog ruskega porekla, eden izmed utemeljiteljev standardnega kozmološkega modela, George (Jurij) Gamow v svoji popularni knjigi *Ena, dva, tri … neskončnost* (1947). John D. Barrow, ki to šaljivo zgodbico o »preslikavah« (*à la* Cantor) pri premikanju gostov iz sobe v sobo neskončnega hotela povzema v knjigi z naslovom *Neskončna knjiga* (*The Infinite Book*, 2005), pa k »paradoksom neskončnosti« dodaja ironično pripombo, da so lastniki tega hotela navsezadnje vendarle spoznali, da je lažje in cenejše namesto tako zapletenega hotela imeti »Hotel Nič« (gl. Barrow:, 50).

[10] Enačbe Alexandra Friedmanna sta dopolnila Howard Robertson in Arthur Walker.

primeru lahko govorimo o »kvazievklidskem« vesolju). Glede dileme med končnostjo *ali* neskončnostjo vesolja je to pomenilo, da je sferično vesolje »zaprto« oziroma »sklenjeno«, torej *končno* v prostoru-času (četudi *brezmejno* v prostoru, morda tudi ciklično-večno v času), medtem ko sta evklidsko in hiperbolično »odprti« vesolji, iz česar bi lahko sklepali – in tako se je največkrat tudi sklepalo ali vsaj mislilo – da je vesolje v teh dveh modelih prostorsko in časovno *neskončno*, vsaj v smeri prihodnosti (torej najbrž *potencialno* neskončno, kajti, kako naj bi nekaj, kar ne bi bilo prostorsko neskončno že v preteklosti, na samem začetku, *postalo* prostorsko *aktualno* neskončno v nekem poznejšem času?). Za raz-rešitev prve Kantove antinomije naj bi potemtakem zadostovalo, da bi ugotovili, kakšno globalno geometrijo ima naše vesolje, in to je načelno mogoče izkustveno ugotoviti. Vendar pa, kot bomo videli, stvari niso tako preproste.[11]

Preden povemo nekaj več o tem, zakaj niso »odprta« vesolja že *eo ipso* neskončna, pa se za hip ustavimo še pri problemu odnosa med potencialno in aktualno neskončnostjo v sodobni kozmologiji, ki smo ga pravkar nakazali. Na vprašanje, ali je vesolje v obeh odprtih FRW-modelih *aktualno* ali zgolj *potencialno* neskončno v Aristotelovem pomenu, ni prav lahko odgovoriti, tako da ni čudno, da na to vprašanje v sodobni kozmološki literaturi ne najdemo jasnih odgovorov in da se le redki dotaknejo tega problema, pa še takrat ne uporabljajo aristotelske terminologije. Tako npr. znani oxfordski kozmolog Joseph Silk piše:

> »Če je vesolje odprto zdaj, je bilo odprto tudi na začetku časa, ob $t = 0$, v trenutku, ki je nedosegljiv s splošno teorijo relativnosti, o katerem pa lahko spekuliramo. V tem prvem trenutku je bilo vesolje neskončno po prostornini, gostota snovi pa je bila ravno tako neskončna. Pravimo, da se je odprto vesolje začelo s singularnostjo neskončne gostote, v kateri se zlomi vsa znana fizika. Bolj realistično lahko začnemo z zgodovino odprtega vesolja v Planckovem času, ob 10^{-43} sekunde, ko je bila njegova gostota že končna, vendar je še vedno zavzemalo neskončno prostornino [kakor naj bi jo še zdaj].« (Silk, 1997: 108)

[11] Na to nas opozarja tudi Brian Greene, ko v *Tkanini vesolja* pravi: »Prav kakor računalniška igrica predstavlja različico s končno velikostjo ravnega prostora, ki nima robov in meja [npr. letalo, ki izgine za desnim robom zaslona, se isti hip spet pojavi izza levega roba], obstajajo tudi različice s končno velikostjo oblike sedla [hiperboličnega prostora], ki nimajo robov in meja. To pomeni, da se vse tri oblike ukrivljenosti (pozitivna, negativna in enaka nič) lahko uresničijo v oblikah s končno velikostjo in brez robov ter meja. (V principu bi torej Magellan, ki bi potoval zunaj Zemlje, lahko izvedel kozmično različico svojega potovanja v vesolju, ki bi bilo ukrivljeno na enega od teh treh načinov.)« (Greene: 290, v op.)

V tovrstnih spekulacijah se ne lomi le fizika, ampak tudi racionalno mišljenje, kajti, kako naj bi ob Planckovem času *postala* gostota končna, če je bila pred tem časom neskončna, in kako naj bi bil, tudi če sprejmemo začetno singularnost glede gostote, prostor že na samem začetku, v »prvem trenutku«, ob $t = 0$, *dejansko* neskončen »po prostornini«?[12] Zdi se, da pri razmišljanju o FRW-modelih vesolja preprosto ne moremo uporabiti klasične distinkcije med aktualno in potencialno neskončnostjo, pa tudi o sami prostorski neskončnosti v tem kontekstu težko govorimo, zato je bolje, če ostajamo pri ustreznejšem razlikovanju med »zaprtimi« (ali »sklenjenimi«) in »odprtimi« vesolji – kakor navsezadnje predlaga tudi Silk, ko razlaga, kaj pomeni trditev, da »je odprto vesolje neskončno danes in je bilo vedno neskončno« (*ibid*., 107): to pomeni, da v odprtem vesolju že ves čas prevladuje ekspanzijska energija nad gravitacijsko in da bo tako tudi v prihodnje (vsaj v hiperboličnem vesolju, v evklidskem pa se v limiti izenačita).

Toda zakaj razlikovanje med odprtim in zaprtim vesoljem (in ugotavljanje, ali je resnično prvo ali drugo) ne zadostuje za raz-rešitev Kantove antinomije? Zakaj iz odprtosti vesolja ne moremo sklepati na njegovo neskončnost, četudi zgolj »potencialno«? Težava je v tem, da prostorska (nes)končnost vesolja ni odvisna le od geometrije, ampak tudi od *topologije* vesoljnega prostora,[13] o topologiji pa nam Einsteinove enačbe ne povedo

---

[12] Morda bo pri »paradoksu« *začetne* prostorske neskončnosti vesolja komu v pomoč naslednja razlaga Nicka Bostroma iz knjige *Anthropic Bias* (tudi Bostrom si jo je sposodil, pri J. L. Martinu, *General Relativity*, 1995): »Široko razširjen nesporazum je, da postane odprto vesolje v standardnem modelu prapoka prostorsko neskončno šele v časovni limiti. *Zaznavno* <*observable*> vesolje je končno, toda le majhen del celote je zaznaven (za nas). Ena izmed zmotnih intuicij, ki je morda kriva za ta nesporazum, je [predstava], da je vesolje nastalo s prapokom v neki prostorski točki. Te stvari si lahko boljše ponazorimo, če si predstavljamo prostor kot neskončno gumasto ponjavo in na njej gravitacijsko vezane skupke, zvezde in galaksije, kot nanjo nalepljene gumbe. Ko se premikamo naprej v času, se ponjava razteguje v vseh smereh, tako da se razdalje med gumbi povečujejo. Če gremo nazaj v času, si predstavljamo, da so gumbi vse bolj in bolj skupaj, in *v 'času nič' postane gostota (še vedno prostorsko neskončnega) vesolja neskončna vsepovsod*« (Bostrom: 51 v op., poudaril avt.). Ta razlaga raztezanja vesolja je klasična (že v '30. letih jo je predlagal Arthur Eddington) – z izjemo zadnjega stavka, ki je dodan, očitno z namenom, da bi razumeli *začetno prostorsko neskončnost*, vendar je, vsaj meni, priznam, nerazumljiv.

[13] O osnovah matematične topologije ter o razliki med geometrijo in topologijo (pa o deželi Ploskviji, Möbiusovem traku, Kleinovi steklenici, torusu, hipersferi itd.) se lahko poučiš iz odlične, nazorne knjižice Jeffreya R. Weeksa *Oblika prostora* (*The Shape of Space*, 1985), ki je prevedena tudi v slovenščino. Topologija neke »ploskve« (lahko tudi tri- ali večrazsežne) je skupek njenih lastnosti, ki se pri geometrijskem preoblikovanju ploskve (raztezanju, ukrivljanju, vrtenju itd.) ne spremenijo; topološke spremembe namreč nastajajo s prediranjem, trganjem, lepljenjem idr. »nasilnimi dejanji« nad neko

prav nič (in lahko se čudimo, zakaj ne: »Čudno dejstvo je, da teorija gravitacije ne pove nič o topologiji vesolja […] globalna topologija vesolja ostaja nedoločena« (Silk, 2006: 186) – toda kakih drugih enačb, ki bi povezovale snov in/ali energijo s topologijo, analogno kot ju Einsteinove povezujejo z geometrijo, pa (še) ne poznamo; mnogi topološko različni Calabi-Yaujevi prostori v sodobnih teorijah strun, ki naj bi v multiverzumu določali vsakokratne vrednosti »prostih parametrov« v posameznih univerzumih, sicer morda kažejo v to smer, vendar je za zdaj ta teorija, predvsem v obliki povezovalne »M-teorije«, še zelo hipotetična. – Torej, če zaenkrat še ostanemo v našem Vesolju: kako je (nes)končnost našega vesoljnega prostora, za katerega z meritvami ugotavljamo, da je evklidski ($\Omega = 1$) ali vsaj »kvazievklidski« ($\Omega \approx 1$), torej ga lahko najbolje opišemo z »ravnim« FRW-modelom, *odvisna od topologije*?[14] Spet se navežimo na Silka, ki v svoji knjigi *Neskončni kozmos* (*The Infinite Cosmos*) pravi:

> »Pomemben mit, ki ga je treba premagati, je sklepanje, da je ravno ali tudi negativno ukrivljeno vesolje [že po sebi] neskončno. Vprašanje velikosti mora biti jedro kozmoloških raziskav. In kako naj znanstveno trdno ugotovimo, ali je vesolje neskončno? Izkaže se, da lahko eksperimentalno testiramo vprašanje, ali je ali ni vesolje skoraj neskončno. Vesolje je morda res zelo veliko v primerjavi z nam vidnim obsegom, kljub temu pa je lahko njegova velikost načeloma izmerljiva.« (Silk, 2006: 183)

Kot je razvidno iz Silkove nadaljnje razlage, pa se vražič znova skriva v podrobnostih, predvsem v tej, da lahko za vesolje izkustveno ugotovimo le, da je *skoraj* neskončno – tj., da postavimo »spodnjo mejo« končnosti, ki pa je, kot kaže, velikanska, »praktično neskončna«, saj po izračunih (zlasti če sprejemamo teorijo inflacije) verjetno sega daleč prek našega »vidnega obsega«, Hubblove sfere, skoraj gotovo pa je večja od te sfere[15] – po drugi strani pa načeloma ne moremo izkustveno ugotoviti, ali je vesolje *dejansko* neskončno, ali pa je njegov »rob« le *zelo* zelo daleč. Ampak kako naj bi

---

ploskvijo (gl. Weeks: 24 isl.). Trije FRW-modeli imajo različne geometrije, vendar *isto* topologijo.

[14] Natančneje rečeno: z »ravnim« FRW-modelom (formulirala sta ga že Einstein & De Sitter leta 1931) smo lahko vse *do nedavnega* najbolje opisovali dinamiko našega vesolja, dokler ni po letu 1998 prišlo do novega zapleta z odkritjem majhne pozitivne vrednosti »kozmološke konstante« (»antigravitacije«, neke še neznane variante Einsteinove Λ); klasični FRW-modeli so torej zmotno predpostavljali, da je $\Lambda = 0$.

[15] S tem se ne bi strinjal francoski kozmolog Jean-Pierre Luminet, ki v svojem topološkem modelu sferično ukrivljenega dodekaedra (2003) – lahko bi rekli, da gre za »platonski« model vesolja v sodobni znanstveni verziji – razvija teorijo o »majhnem« končnem vesolju, katerega volumen znaša petino manj od volumna Hubblove sfere (gl. Luminet: 300).

imelo »ravno«, evklidsko vesolje kak rob, kako mejo? Saj je *nima* (glede tega se Lukrecij in Bruno nista motila), a kljub temu bi bilo v primeru, če bi imelo vesolje topološko strukturo, ki se imenuje *torus*[16], tudi v evklidski geometriji *končno*, kar pomeni, da bi imelo končno, izračunljivo prostornino (kakor jo imajo »sklenjena« vesolja, npr. »hipersfera« v prvem Einsteinovem kozmološkem modelu). Toda kako naj bi izkustveno ugotovili, ali ima vesolje res topološko obliko torusa? Če zaradi enostavnosti pustimo ob strani še dodatno težavo, da teoretično obstaja kar »18 različnih vrst [topološko] ravnih prostorov« (Silk, 2006: 190), med katerimi jih za opis našega vesolja pride v poštev šest (gl. *ibid*.), bi lahko opazili šibke krožne vzorce na prasevanju (doslej jih s satelitoma COBE in WMAP še niso zaznali), ki bi bili učinki takšne »kompaktne topologije« vesolja (če ne bi bil torus prevelik). Silk razlaga:

> »Zamisli si, da bi bilo zaznavno vesolje predstavljeno v dveh dimenzijah kot majhna zaplata <*patch*> na velikanskem [2D-]torusu. Ta bi imel kompaktno topologijo <*compact topology*>, v nasprotju z valjem <*cylinder*>, ki je neskončen v eni dimenziji, in listom <*sheet*>, neskončnim v dveh dimenzijah. Seveda je v 3D prostorih več variant, ampak načela so ista. Če bi bila topologija vesolja kompaktna, bi se lahko svetlobni žarki razširjali <*propagate*> v krogih. To [za-okroženje] bi lahko trajalo dolgo časa, odvisno od tega, kako velik bi bil obod torusa, po katerega površini <*surface*, ploskvi> bi fotoni potovali.« (Silk, 2006: 187)

Ena izmed še posebno bizarnih, vendar po svoje mikavnih posledic kompaktne topologije torusa – zlasti če bi bila le-ta bolj zapletena (možni so namreč torusi z več kot eno »luknjo«) – bi bilo to, da bi na nebu videli

[16] Natančneje: trirazsežni ravni torus (tu ga imenujmo kar *torus*), ki si ga lahko »za silo« ponazorimo na naslednji način: najprej si predstavljajmo evklidsko ravno 2D-ploskev (pravokotnik, npr. podolgovat papirnat list), ki jo zvijemo v valj, nato pa zlepimo oba konca valja in tako dobimo obliko, podobno kolesni zračnici: to je 2D-torus, čeprav ne povsem evklidski, saj so npr. trikotniki na njegovi površini rahlo »deformirani« (vsota njihovih notranjih kotov je malce večja od 180° zaradi krožne ukrivljenosti zračnice; na valju je bila ta vsota še natančno 180°, kar je na prvi pogled morda presenetljivo, a ob tem lahko pokličemo na pomoč bolj intuitivno razvidno dejstvo, da vzporednice tudi na valju ostajajo evklidske vzporednice, ki se ne sekajo); toda to neevklidsko težavico lahko matematična topologija popravi tako, da (v enačbah) »zlepi« *evklidske* ploskve; in nazadnje pri naši zasilni ponazoritvi preostane le še to, da v *mislih* – v predstavi bolj težko, čeprav nekateri pravijo, da zmorejo tudi to – »prenesemo« lastnosti 2D-torusa na 3D-torus (analogno, kakor prenesemo našo predstavo iz dveh v tri dimenzije pri miselni »ponazoritvi« 3D-hipersfere v Reimannovi sferični geometriji). Rečeno v matematičnem jeziku: »trirazsežni torus je produkt dvorazsežnega torusa in krožnice« (Weeks: 63). Torus je primer prostorske »mnogoterosti« <*manifold*> s »kompaktno« in »mnogokratno povezano« topologijo (gl. nadaljevanje).

»replike« *istih* galaksij iz različnih obdobij kozmološkega časa.[17] »V tem primeru bi bila na nebu obilica galaksij-prikazni <*galaxy ghosts*>, mnogoterih kopij iste podobe« (Silk: *ibid*.); a tudi, če bi bilo res tako, bi bilo težko »razplesti« te informacije, kajti na replike bi vplivalo gravitacijsko lečenje svetlobe na njeni dolgi poti do nas, pa oblaki medgalaktičnega prahu in druge optične motnje ter nenazadnje tudi sam razvoj galaksij (včasih na stari fotografiji otroka ne prepoznamo odraslega človeka, ki ga sicer dobro poznamo). Toda, kot sem že mimogrede omenil, pride v poštev pri prepoznavanju morebitne kompaktne topologije našega vesolja še neka druga, obetavnejša strategija: svetlobni »krogi« torusa bi se vtisnili v prasevanje, če ne bi bil torus precej večji od »vidnega obsega« vesolja, Hubblove sfere. Svetlobni žarki, ki po Einsteinu vselej sledijo »ničelnim geodetkam«, tj. prostorsko najkrajšim svetovnicam med dogodki v prostoru-času, lahko potujejo v torusu zaradi njegove nenavadne topologije *po mnogih različnih poteh*; topološko se temu reče, da je prostor »mnogokratno povezan« <*multiply connected*>. »Različne poti fotonov iz istega dogodka razpršitve <*scattering event* [tj. s horizonta fotonov, kjer/ko se je sprostilo prasevanje]> imajo različne dolžine, tako da ustvarjajo podobe istega vira v različnih jakostih in različnih smereh. In če je za fotone dovolj časa, da obkrožijo vesolje [tj., da pridejo *okrog* torusa], to vodi k podobam-prikaznim <*ghost images*>« (Silk, 2006: 188).[18] Na prasevanju bi bile te »prikazni« zaradi torusa krožne, kar pomeni, da bi »lahko pričakovali, da bomo opazili številne kroge na nebu [na prasevanju], in sicer kot krožne vzorce zelo majhnih temperaturnih razlik« (Silk, 2006: 189). Čeprav doslej takšnih krogov na prasevanju *še* nismo opazili, iz tega ne moremo sklepati, da jih ni, ampak kvečjemu, da naše

[17] To misel še posebno zanimivo razvija že omenjeni Jean-Pierre Luminet. Luminetovo vesolje naj bi imelo kompaktno topologijo (rahlo sferičnega) dodekaedra, geometrijskega telesa, sestavljenega iz 12 pravilnih peterokotnikov in zgodovinsko znanega kot enega izmed petih Platonovih »idealnih poliedrov« iz *Timaja*, kjer dodekaeder nastopa kot forma legendarnega etra, »petega elementa«.

[18] »Mnogokratno povezanost« dveh točk M in N si lažje predstavljamo na 2D-torusu (»kolesni zračnici«): zamislimo si, da sta M in N na površini tega torusa in da je M neka daljna galaksija, N pa je naša Zemlja, s katere opazujemo galaksijo M. Žarki z galaksije M se širijo zgolj po površini tega torusa, seveda pa v *vse* smeri te površine – in zdaj pride poanta: zaradi »kompaktne topologije« torusa nekateri žarki iz M, preden pridejo do N, do nas, obkrožijo torus (njegovo »debelino«) le enkrat, drugi dvakrat, tretji trikrat ... do (poljubno) n-krat, tj., žarki iz M grejo n-krat skozi topološko »luknjo« torusa, preden pridejo do N, do nas. Kot vemo, pa svetloba potuje s končno, konstantno hitrostjo c, zato bomo na N videli žarke iz M (se pravi, galaksijo M) kot niz njenih časovnih »replik«, najprej »pravo« galaksijo M (recimo ji M_0), potem pa njene »galaksije-prikazni« (M_1, M_2, M_3 … M_n). Zaradi »mnogokratne povezanosti« topologije torusa bomo *isto* galaksijo M videli mnogokrat, vsakič šibkejšo zaradi daljše poti svetlobnih žarkov oz. raztezanja torusa-vesolja (gl. Luminet: 11 in 86-93).

»vesolje ne more biti zelo majhno« (*ibid*.), kar pomeni, da je najbrž precej večje od Hubblove sfere, ki je, ne pozabimo, za naše običajne predstave že sama velikanska, saj njen časovni radij meri kakih 14 milijard svetlobnih let (prostorski pa še več zaradi raztezanja vesolja) in zajema kakih 100 milijard galaksij, vsaka galaksija pa ima v povprečju 100 milijard zvezd! Spomnimo se tudi, da svetloba, ki pride z Lune v približno eni sekundi, potuje do nas iz *najbližje* zvezde Proksime v južnem ozvezdju Kentavra več kot štiri leta …

Na vprašanje, ali je sodobna kozmologija razrešila Kantovo antinomijo glede *prostorske* končnosti nasproti neskončnosti (našega) Vesolja – saj glede *časovne* (nes)končnosti, ki je s prostorsko seveda povezana v prostoru-času, po standardnem kozmološkem modelu velja, da Vesolje *ni* neskončno staro – torej (še) ne moremo odgovoriti drugače kot Silk: »Ne vemo, ali je vesolje končno ali neskončno« (Silk, 2006: 191). Ugotovili pa smo, da je evklidsko ali »kvazievklidsko« *ravno* vesolje, ki ga kažejo naše meritve ($\Omega \approx 1$), *lahko* tudi končno, na primer, če ima topologijo torusa (in analogno velja za hiperbolično vesolje, v katerem je $\Omega < 1$); lahko pa je vendarle neskončno (tj., vsaj »potencialno« neskončno v pomenu, da se bo raztezalo *ad infinitum*), toda *če* je neskončno, tega nikoli ne bomo mogli znanstveno, izkustveno ugotoviti. Tej ugotovitvi se pridružuje tudi John Barrow:

> »Če bi imelo Vesolje <*the Universe*> neskončno velikost in neskončen prihodnji življenjski čas, potem bi to dvoje lahko pomenilo aktualni neskončnosti z nadčloveškega stališča nekoga, ki bi gledal na Vesolje izven prostora in časa, toda za nas to nikoli nista aktualni neskončnosti. […] Z neposrednim opazovanjem nikoli ne moremo zvedeti, ali je Vesolje neskončno veliko, ali pa je le končno, toda neizmerno veliko.« (Barrow: 101)

V *tem* smislu je bil Kantov kozmološki agnosticizem pravilen, toda danes vemo vendarle *nekaj* več glede možne razrešitve njegove znamenite antinomije, ne sicer glede njene antiteze (neskončnosti), ampak glede njene teze (končnosti): kajti, *če* je naše Vesolje prostorsko (denimo, topološko) res *končno*, potem se to lahko nekega dne znanstveno potrdi (npr. z odkritjem »krogov« na prasevanju, za katere bi vsekakor potrebovali še boljše opazovalne naprave od današnjih) – in tako bi bila antinomija razrešena. Ob tem pa je treba pripomniti, da tudi dolgotrajno neuspešno iskanje »krogov« (ali kakih drugih »prikazni« na nebu) še ne bi pomenilo, da jih ni oziroma da je Vesolje neskončno, kajti: »Načeloma je možno izmeriti velikost vesolja le, če ni preveliko, kajti v tem primeru bi bili napovedani vzorci preprosto prešibki« (Silk, 2006: 192). Kot sem že rekel, so bili doslej pri meritvah s satelitom WMAP rezultati negativni, vendar tudi ta negativnost ni povsem nepomembna, saj pomeni vsaj prvo določitev

»spodnje meje« končnosti Vesolja. Silk meni, da »iz teh raziskav lahko sklepamo, da topološko merilo vsaj za 90 odstotkov presega merilo [oddaljenost] današnjega horizonta [Hubblove sfere]« (*ibid.*).[19]

Preden preidemo k transfinitnim kozmologijam multiverzumov, lahko rečemo še to, da kantovska (in nasploh klasična) dilema med končnostjo ali neskončnostjo našega Vesolja dandanes ni izgubila le svoje ostrine (zaradi neevklidskih geometrij itd.), ampak tudi precejšen del svoje nekdanje *relevantnosti*, ki jo je pri Kantu uvrščala na prvo mesto med kozmološkimi dilemami. Zakaj? Ker je današnje vesolje – tudi če se kdaj izkaže, da je *končno* – tako velikansko, da presega vse naše predstave in najbrž tudi misli. Nekdaj pa ni bilo tako. Antični in srednjeveški kozmos, deloma tudi renesančni, tja do Kopernika in Bruna, pravzaprav pa tudi pozneje, vse do odkritja »nepojmljivo« velikanskih razdalj do zvezd v 19. st. in še večjih do galaksij v 20. st., je bil v svoji *numinozni veličini* človekovo kozmično *domovanje*, naš »vesoljni dom«. Alexandre Koyré nam v znani knjigi *Od sklenjenega sveta do neskončnega univerzuma* (1957) lepo prikaže, kako pomembne so bile v renesansi in zgodnjem novem veku filozofske, teološke, etične, družbene in celo politične posledice vélikega kozmološkega preobrata. Seveda se je preobrat v videnju in občutju vesolja začel že s Kopernikom, vendar vesolje tudi v Kantovem času še ni bilo »preveliko« za človeka, še vedno je bilo v mislih prisotno kot *kozmos* v klasičnem pomenu – dandanes pa tega skorajda ne bi mogli več reči (morda z izjemo tistih »optimistov« med kozmologi, ki razumejo antropično načelo tako, da z njim dokazujejo, češ da naše Vesolje *ne bi moglo* biti manjše za

[19] Pri razmišljanju o (nes)končnosti *našega* Vesolja – kar pomeni, *tega* vesolja, ki je nastalo z »našim« prapokom (morda edinim, morda enim izmed mnogih), iz katerega so nastale vse »naše« galaksije in zvezde, tako vidne znotraj Hubblove sfere kot nevidne onstran nje, in katerega sled(i) vidimo na prasevanju, najstarejšem znanem »fosilu« – pri tem razmišljanju navajamo predvsem topološke razloge (torus) za možno prostorsko končnost Vesolja, ki se nam v meritvah kaže kot »ravno«, evklidsko. Lahko pa bi navedli še druge razloge, na primer »problem pospeševanja«, tj., nedavno (po letu 1998) odkritje pospešenega raztezanja vesolja, ki ga med težavami za razrešitev dileme med končnostjo in neskončnostjo navaja (Barrow: 146 isl.); to odkritje namreč poglablja dvom, ali so fizikalne »naravne konstante« res prave konstante v dolgih *časovnih* razponih (v tem primeru Λ) – kajti, če niso, bi se lahko v daljni prihodnosti npr. zgodilo, da bi se tudi Ω, ki izraža ukrivljenost vesoljnega prostora, iz danes izmerjene vrednosti $\Omega \approx 1$ kdaj pozneje (zaradi zdaj še neznanih razlogov) spremenila v $\Omega > 1$ in s tem »zaprla« Vesolje, tako da bi bilo navsezadnje prostorsko končno, četudi se nam zdaj (če ne upoštevamo možnosti »kompaktnih topologij«) zdi bolj verjetno, da je neskončno. – Barrow lepo pravi: »Možno je, da je naše Vesolje neskončno, vendar je to ena izmed njegovih najbolj varovanih skrivnosti. Neskončnost je varovana s končnostjo. Morda je neskončnost atribut univerzumov, toda zaščitena je z obstoječimi mejami hitrosti širjenja informacij. Lahko bi se zgodilo, da bi odkrili, da je Vesolje neskončno, toda odkrivanje tega bi zahtevalo neskončen čas« (*ibid.*: 149).

nastanek nas, opazovalcev, kot dejansko je). Novoveški človek je potreboval kar nekaj časa, stoletje ali dve, da si je duhovno »opomogel« od pretresa, ki ga je povzročilo renesančno spoznanje, da Zemlja ni v središču kozmosa; pravzaprav si je pomagal bolj s pozabo kot z raz-rešitvijo tega nesorazmerja med seboj in Vesoljem, pa tudi kozmologija in teologija sta se v novem veku vse bolj ločevali, vsaj do Hubblovega odkritja, ko je (teistična) teologija zaslutila možnost nove bližine z znanstveno kozmologijo. Dandanes le malo ljudi *zares* premišljuje o Vesolju (ali vesoljih), še manj pa jih v Kantovi kozmološki antinomiji vidi človeško relevanten, »eksistencialen« problem. Zvezde in galaksije so preprosto predaleč, da bi jim sledili v vsakdanjih mislih. (Astronomi jim že vsakodnevno sledijo, pretežno na računalniških zaslonih, ampak zdaj ne govorim o tem, to je nekaj drugega: »čista znanost«, ki seveda ohranja svojo lepoto in smisel.) Sicer pa s stališča naše končne »tu-biti« običajno mislimo, da je Vesolje »praktično neskončno«, kar nam lahko potrdijo tudi astronomi in kozmologi; in če je že *to*, »naše« Vesolje, *praktično neskončno* – je multiverzum »transfiniten«!

Neskončni multiverzumi in teorija množic

Če v kozmologijo uvedemo multiverzum(e), se znanstveni in tudi filozofski odgovor na klasično, kantovsko dilemo med končnostjo in neskončnostjo še veliko bolj odmakne – v smeri neskončnosti, čeprav *dejanska* neskončnost multiverzuma ni nič bolj problematična kot dejanska neskončnost našega Vesolja. Tudi vprašanje, na katerega smo doslej (ne povsem uspešno) poskušali odgovoriti, ali je naše Vesolje končno ali neskončno, se ob predpostavki multiverzuma še dodatno zaplete, kar nam Barrow nazorno pokaže z naslednjim hipotetičnim scenarijem: recimo, da sprejmemo Lindejevo teorijo »večne inflacije«, v kateri nastajajo vesoljni »mehurčki«, med njimi tudi naše Vesolje; zaradi naključnih kvantnih fluktuacij v prvotnem inflatornem polju je v našem Vesolju (našem »mehurčku« v multiverzumu) vrednost $\Omega \leq 1$ (ali, kot kažejo merjenja, $\Omega \approx 1$), torej je – če tu pustimo ob strani možnost kake »kompaktne« topologije – naše Vesolje (vsaj potencialno) *neskončno*; toda lahko bi se zgodilo, da bi bil naš vesoljni »mehurček« *znotraj* večjega »mehurja«, v katerem bi bila $\Omega > 1$, torej bi bilo to, od našega domnevno neskončnega Vesolja še večje **V**esolje *končno*, z njim pa »v totalu« tudi naše! Barrow razlaga: »Lahko si le mislimo, da živimo v Vesolju s podkritično gostoto, vendar zgolj naseljujemo pod-gosti <*underdense*> 'mehurček' znotraj Vesolja z nadkritično gostoto« (Barrow: 145). Toda ta in podobni primeri težav z (nes)končnostjo *v* multiverzumu (ter multiverzuma samega) so le »simptomi«, le »vrhovi ledenih gora«, kajti če dobro premislimo sam *pojem multiverzuma*, pojem kozmološke »mnogoterosti« <*Mannigfaltigkeit, manifold*>, bomo kmalu spoznali, da multiverzum(i) poleg raznih znanstveno-fizikalnih težav, o katerih smo govorili v prejšnjih sekvencah, porajajo še globlje *metodološke* težave v samem pojmovnem instrumentariju, s katerim se o njih govori ter razpravlja *pro et contra*.

Roger Penrose v svoji obsežni knjigi *Pot k resničnosti* (*The Road to Reality*, 2005), v razdelku 16. poglavja pod naslovom »Lestev neskončnosti«, razpravlja o Cantorjevi transfinitni teoriji množic; tam med drugim ugotavlja, da je (bil) njen vpliv na sodobno fiziko zelo majhen, tako rekoč zanemarljiv v primerjavi z vplivom drugih temeljnih matematičnih disciplin (funkcijske analize, neevklidskih geometrij, teorije grup idr.): »Morda je spričo tesne zveze med matematiko in fiziko vredno pozornosti, da so imeli doslej rezultati <*issues*>, ki so za matematiko tako temeljni in pomembni, kot sta transfinitna teorija množic in izračunljivost [*cf.* gödlovska tematika], zelo omejen vpliv na naš opis fizičnega sveta […] in precej presenetljivo je, da, kot se zdi, v skoraj nobeni fizikalni teoriji ni treba iti čez kardinalnost sistema realnih števil« (Penrose: 378); mimogrede rečeno, sam sega matematično dlje s svojo fizikalno teorijo »tvistorjev« (gl. *ibid*., 33. pogl.). Penrosova ugotovitev gotovo drži glede aplikacije *rezultatov* transfinitne teorije množic, mislim pa, da je manj upravičena glede samega *načina razmišljanja*, pojmovnega instrumentarija (tudi »zakulisnega«) pri nekaterih ekstremnih, visoko »spekulativnih« fizikalnih teorijah, kar še posebej velja za teorije multiverzuma; res pa je, da se glavni protagonisti multiverzumov (Susskind, Linde, Rees idr.), ki so predvsem fiziki oziroma kozmologi, doslej še niso – kolikor mi je znano – kaj dosti ukvarjali s pojmovnimi, »metateoretičnimi« temelji svojih teorij. Z njimi se bolj ukvarjajo kritiki, toda postopoma se v razpravi o multiverzumu na »obeh straneh« uveljavljajo izrazitejši logično-analitični pristopi, kar lahko vidimo tudi v reprezentativnem zborniku *Univerzum ali multiverzum?* (*Universe or Multiverse?*, ur. Bernard Carr, 2007), zlasti v prispevkih Georga Ellisa, Anthonyja Aguirra in Leeja Smolina. Na vprašanje, ali fizikalni multiverzumi zahtevajo *neskončne* domene univerzumov ali ne, sicer ni enotnega, niti enoznačnega odgovora, kljub temu pa si drznimo reči, da postopoma nastaja nekakšna *transfinitna kozmologija* po analogiji s Cantorjevo transfinitno teorijo množic, saj v bolj analitičnih pristopih nastopajo univerzumi kot elementi množice (oz. »mnogoterosti«) multiverzuma, kar načeloma omogoča iteracijo, namreč multiverzume kot elemente Multiverzuma »drugega reda« … in tako *ad infinitum*? Temu vprašanju korelativno je vprašanje fizikalnih zakonov, ki lahko (na višjih ravneh) variirajo v univerzumih, tako da postajajo množice »efektivnih zakonov« <*by-laws*> elementi množice Zakonov »drugega reda« (zakonov zakonov ali »metazakonov«) … tudi *ad infinitum*? Toda tu se je treba ustaviti in reči: Ne, kajti glede tega je imel Aristotel (in mnogi logiki za njim) prav: *regressus* je logična napaka, zato je treba iskati drugačne rešitve, da se potencialno neskončna serija vse višjih multiverzumov in njihovih zakonov vendarle nekje zaključi, sklene v »celoto« – Univerzum.

Metodološko vlogo matematičnih množic v fizikalnih teorijah multiverzumov dobro razberemo v zanimivem članku »Multiverzumi in kozmologija: filozofske teme« (*Multiverses and Cosmology: Philosophical Issues,* 2006), ki so ga napisali trije avtorji William Stoeger, George Ellis in Uli Kirchner. Trojica uvodoma ugotavlja, da za antropično razlago »natančne naravnanosti« našega univerzuma ni dovolj konceptualno možen multiverzum, ampak »potrebujemo univerzume, ki aktualno obstajajo, skupaj z mehanizmi, ki generirajo njihov nastanek« (S.&E.&K.: 4); torej je treba najprej *definirati* množico *M,* katere elementi so vsi *možni* univerzumi *m*, potem določiti »distribucijsko funkcijo« *f*(*m*), ki znotraj *M* izbere *obstoječe* univerzume, in nazadnje še kriterij (tudi funkcijo), ki določi *antropično* podmožico znotraj obstoječih univerzumov. Toda zatakne se že pri vprašanju, kako definirati *M*:

> »Kaj določa *M*? Odkod prihaja ta struktura? Kaj je njen meta-vzrok, ali temelj, ki zamejuje množico možnosti? Zakaj je struktura uniformna prek vseh univerzumov *m* v *M*?« (S.&E.&K.: 7)

Kajti, če *M* res zajema vse možnosti univerzumov, moramo vendarle vedeti, kako naj se odločimo, za *katere* »vse« možnosti gre oziroma katere so *meje* teh možnosti, toda »na ta vprašanja ni mogoče znanstveno odgovoriti, čeprav je za to [razpravo] nujen znanstveni pristop. Kako bi nanje odgovorili filozofsko?« (*ibid.*).[20] Tej prvi težavi, sledijo še druge, od vprašanja, kako definirati funkcijo *f*(*m*) – na primer, ali je možen obstoj univerzuma z več ali manj kot tremi »razvitimi« prostorskimi dimenzijami – do vprašanja, kako naj pojmujemo *anthroposa* v antropičnem načelu, tj. kako široka je domena »opazovalca«. Trojica avtorjev še posebej opozarja na težave z neskončnostjo:

[20] Prim. tudi odlomek iz Ellisovega članka v Carrovem zborniku: »Kako široko območje variacij smo pripravljeni upoštevati v našem razredu multiverzumov? Ali smo pripravljeni upoštevati univerzume s povsem različnimi fizikami? […] Z drugačnimi vrstami logike in mogoče z alternativnimi formami matematike? Kaj pa univerzume, ki dopuščajo magijo, tako kot v romanih J. K. Rowlingove o Harryju Potterju? – In če nismo pripravljeni sprejeti vsega tega, kakšne razloge imamo za to? Če je osnovno načelo 'Vse, kar se lahko zgodi, se res zgodi', potem morajo biti sprejemljive vse te vrste univerzumov, kakor tudi teistični in neteistični univerzumi, pa univerzumi, zasnovani v lepoti in eteričnih vibracijah, rajši kot utemeljeni s fiziko itd. Znanstvena fantastika je plodovit izvir takšnih idej. […] Če pa naj bodo takšne ideje izločene, moramo imeti neko meta-načelo, ki jih bo izključevalo, pa tudi upravičenje, zakaj naj uporabimo to meta-načelo [prav] na tem ansamblu. Samo filozofija lahko upraviči takšno izbiro.« (Ellis, v: Carr, 394-95)

> »Ko govorimo o multiverzumih ali ansamblih univerzumov – o možnih ali dejanskih – se neizogibno postavi vprašanje neskončnosti. Raziskovalci si pogosto zamišljajo neskončno množico univerzumov, v katerih so udejanjene vse možnosti. Toda, ali lahko obstaja neskončna množica resnično obstoječih univerzumov? Po našem mnenju si lahko mirno odgovorimo: ʽNe.'« (S.&E.&K.: 13)

Pri kozmološki uvedbi neskončnih multiverzumov nastajajo nerešljivi problemi, kadar poskušamo neke dobro definirane pojme neskončnosti iz matematike, kjer so se izoblikovali v dolgem in skrbnem razvoju formalnih sistemov (na primer v Zermelo-Fraenklovi precizaciji aksiomatske teorije množic), prenesti na področje fizike, se pravi, *matematično* neskončnost spremeniti v *fizikalno*. Trojica avtorjev navaja misel Davida Hilberta, da »domneven obstoj aktualno neskončnega direktno ali indirektno vodi k dobro znanim nerešljivim paradoksom teorije množic« (*ibid*.: 14). Gre seveda za znameniti Russellov paradoks »množice vseh množic, ki ne vsebujejo sebe kot element«, ter za njegove variante, med katerimi velja v našem kontekstu omeniti zlasti Burali-Fortijev paradoks »največjega ordinalnega števila«.[21] Tovrstni »sintaktični paradoksi«, kot jih je imenoval Russell, sicer tudi v matematiki niso direktno rešljivi, možno pa se jim je

---

[21] Ordinalna števila ali »ordinali«, tj. števila, ki označujejo »red« neke množice, sama tvorijo po Cantorjevi definiciji »dobro urejeno« množico (oz. vrsto). Pogoji dobre urejenosti neke množice so, če malce poenostavimo Cantorjeve aksiome (natančneje, gl. Lavine: 80), naslednji: (1) obstaja prvi ordinal; (2) za vsak ordinal obstaja novi ordinal, ki je njegov (neposredni) naslednik; (3) za vsako množico ordinalov (končno ali neskončno), obstaja novi ordinal, ki je prvi naslednik vseh ordinalov te množice (gl. tudi Moore: 125). Tako je npr. ω naslednik *vseh* naravnih števil in s tem označuje »red« celotne množice naravnih števil, tj. »števne neskončnosti«, množice N z »močjo«, ki jo izraža kardinalno število »Alef-0« ($\aleph_0$); naslednik prvega transfinitnega ordinala ω je novi transfinitni ordinal $\omega+1$ itd. – In zdaj k paradoksu, ki ga je Russell leta 1902 (leto dni po odkritju »svojega« paradoksa) imenoval po italijanskem matematiku Cesaru Burali-Fortiju, čeprav je baje že pred tem sam vedel zanj (gl. Lavine: 61). Paradoks izhaja iz dejstva, da so ordinali sami dobro definirana in »dobro urejena« množica, tako kot naravna ali realna števila. Zdi se, da vsi skupaj tvorijo povsem določeno in »dovršeno« matematično celoto. Zakaj jih torej ne bi v Cantorjevem slogu »zbrali skupaj«, analogno kot naravna ali realna števila, in *celotno* množico ordinalov poimenovali Ω? Če obstajajo *neskončne* množice, kot trdi Cantor, ne moremo oporekati, da tudi Ω obstaja, saj je dobro definirana/urejena. Toda premislimo: če Ω res obstaja, potem je to množica ordinalov kot vsaka druga, in potemtakem mora obstajati, po pogoju (3) za dobro urejenost, *novi* ordinal, ki je (prvi) naslednik vseh ordinalov množice Ω – to pa je v protislovju s predpostavko, da je Ω množica *vseh* ordinalov, in ujeli smo se v paradoks. Burali-Fortijev paradoks bi lahko izrazili krajše tudi takole: »Če Ω obstaja, potem je dobro urejena, torej mora obstajati neki ordinal, ki nastopa kot mera, kako dolga je ta dobra urejenost [tj. merilo tega reda]. Toda očitno noben ordinal *v* [množici] Ω ni dovolj velik, da bi to zmogel. Torej Ω le ne more vsebovati vseh ordinalov« (Moore: 126).

izogniti s skrbno izbranimi aksiomi, definicijami itd. Toda če Cantorjevo »pravo« (aktualno) neskončnost transfinitnih števil interpretiramo s fizikalnimi modeli multiverzumov kot neskončnih množic univerzumov, v teh modelih nimamo več možnosti »kontrole« nad izborom aksiomov, kajti »robne pogoje« nam narekuje fizična realnost, kozmološke zakonitosti, ne pa »svobodna« (po Cantorju) matematična konstrukcija in zgolj logična konsistentnost. Russellovega »aksioma neskončnosti« ni mogoče preprosto prenesti v fiziko oziroma kozmologijo. Trojica avtorjev poudarja, da –

> »[P]roblem udejanjene neskončnosti <*realised infinity*> ni primarno fizikalen v običajnem pomenu – ampak je primarno konceptualen ali filozofski problem. 'Neskončnost', kot je pojmovana in obravnavana v matematiki, ni takšna lastnost, ki bi bila lahko fizično udejanjena kot neka entiteta, objekt ali sistem, kakor je lahko neko določeno število, temveč je nedoločeno velika, in se dejansko nanaša prej na proces kot na neko entiteto. Proces pa, na katerega se nanaša, nima določenega konca ali dopolnitve. Noben fizikalno smiseln parameter nima dejansko neskončne vrednosti.« (S.&E.&K.: 17)

Paradoksi teorije množic izražajo težavo, ki nastane, če postavimo neko »obstoječo« (v matematičnem pomenu: neprotislovno) entiteto na vrh hierarhične piramide, na primer, v Burali-Fortijevem paradoksu *največje* ordinalno število, tj. ordinalno število *vseh* ordinalnih števil. Toda *analogni* paradoksi se pojavijo v fizikalnih modelih multiverzumov, če dopustimo, da se multiverzumi neomejeno vzpenjajo »navzgor«, k domnevnemu »najvišjemu« Multiverzumu. Kajti, s katerim argumentom naj zavrnemo obstoj tega kozmološkega »maksimuma«, če pa nas sama »logika« konstrukcije multiverzumov (variiranje fizikalnih parametrov, zakonov, dimenzij, topologij itd.) vodi k tej »realni«, toda neizbežno paradoksni Entiteti? Namreč, če hočemo ostati *znotraj znanosti*, moramo tudi ta domnevno »najvišji« Multiverzum definirati z nekimi Zakoni, vendar ob tem ne moremo odmisliti še višjih Zakonov, ki bi uzakonjali tiste »prej« najvišje Zakone … in tako se ujamemo v kozmološko varianto Burali-Fortijevega (in tudi Russellovega) paradoksa. Edina možnost raz-rešitve paradoksa je »preboj« v neko drugo pomensko »sfero«, ki *presega* znanstveno, fizikalno kozmologijo. – Ob tem se je zanimivo vprašati (ali spomniti, če smo že vedeli), kako je sam Cantor gledal na paradokse teorije množic, ki so jih odkrivali Russell in drugi. Zakaj mu niso prišli tako »do živega« kot Fregeju in Russellu? Odgovor je preprost in zelo poučen: zato ker je Cantor v svojih »najvišjih« matematičnih mislih *presegel* matematiko! Poglejmo na kratko, kako je to mogoče.

Cantorjev Absolut in Kantova »regulativna ideja« celote

A. W. Moore v že navedeni knjigi *The Infinite* ugotavlja, da Cantorja ni skrbel Burali-Fortijev paradoks (in njemu podobni »sintaktični« paradoksi teorije množic) zato, ker je pri konstrukciji svoje transfinitne matematike že sam predpostavljal, da so nekatere množice (»celote«) tako nesorazmerno velike, da jim ni mogoče pripisati »moči« (tj. kardinalnega števila), kakor jo lahko pripišemo npr. števni neskončnosti ($\aleph_0$) ali kontinuumu ($\aleph_1$). Tak primer je »celota« vseh ordinalnih števil: »Ne obstaja takšna množica – in to je dovolj za izgon paradoksa« (Moore: 127). Cantor je takšne pojme imenoval »nekonsistentne celote«, ki ne sodijo v transfinitno domeno, temveč v »domeno« *absolutne* neskončnosti, ali kratko – Absoluta. Analogno velja za »množico *vseh* množic« (z Russellovim predikatom »ki ne vsebujejo same sebe« ali brez njega): Cantor te nekonsistentne celote ni sprejel v svojo transfinitno aritmetiko, zato »Cantorjevega paradoksa« največjega kardinalnega števila sploh ni. Z matematično-formalnega stališča seveda lahko temu ugovarjamo, predvsem če sledimo Russellovi diagnozi težav z neskončnostjo v matematiki in/ali logiki ter njegovi »teoriji logičnih tipov«, ki je (preveč) radikalna terapija teh paradoksov (gl. tudi Uršič, 1987: 10 isl.). Toda to ni edini možni, morda niti pravilni pogled na »paradokse teorije množic«.

Shaughan Lavine v monografiji *Razumevanje neskončnega* (*Understanding the Infinite*, 1994), v kateri se posveča predvsem analizi Cantorjeve transfinitne matematike in njenemu »naravnemu« nadaljevanju v Zermelo-Fraenklovem aksiomatskem sistemu – in sicer v *nasprotju* s filozofi matematike, kot sta bila Frege in Russell in drugi, ki so jima sledili – ugotavlja, da Cantor *ni* sprejemal Peano-Russellovega »načela vsebovanja« <*the Comprehension Principle*>, ki pravi, da »je razred <*a class*> lahko definiran kot [množica] vseh ʽtermovʼ <*terms*>, ki izpolnjujejo neko propozicijsko funkcijo« (Lavine: 63); kajti takšna »logistična«, funkcijska definicija razreda oz. množice po Lavinovi presoji neizogibno vodi v paradokse (gl. *ibid*.: 66), medtem ko naj bi se jim Cantorjeva domnevno »naivna« definicija množice izmaknila, saj je Cantor – kot pravi Lavine – opredelil množice kot »kombinatorne zbirke« <*combinatorial collections*>, »definirane z enumeracijo njihovih termov«, in te zbirke so »splošnejše od [Russellovih] logičnih zbirk« (*ibid*.: 77), obenem pa je takšna definicija »zbirke« oz. množice bolj restriktivna: »Ker so kombinatorne zbirke enumerirane [tudi transfinitne!], so lahko nekatere mnogoterosti prevelike, da bi bile zbrane v kombinatorno zbirko« (*ibid*.: 78). S tem se je Cantor izognil Russellovemu paradoksu, kot je sam zapisal v pismu Jourdainu 9. julija 1904:

> »Če bi zdaj, kot predlaga g. Russell, zamenjali $\mathfrak{M}$ z neko *nekonsistentno* mnogoterostjo (morda s celoto *vseh* transfinitnih ordinalnih števil $\mathfrak{W}$), potem *nikakor ne bi bila oblikovana* celota, ki ustreza $\mathfrak{G}$. To ni možno zato, ker nekonsistentna mnogoterost ne more biti razumljena kot *celota*, torej kot neka *stvar*, in *ne* more biti uporabljena kot *element* mnogoterosti. – Samo *dovršene stvari* lahko jemljemo kot *elemente* mnogoterosti, samo *množice*, ne pa *nekonsistentnih mnogoterosti*, v katerih naravi je, da ne morejo biti nikoli pojmovane kot *dovršene* in *aktualno obstoječe*.« (Cantor, v Lavine: 99)

Res je zanimivo in značilno, kako Cantor, odkritelj transfinitnih števil, piše o pojmovni »dovršenosti«, ki je bila, klasično gledano, ravno nasprotna neskončnosti. Lavine pa, sledeč Cantorju, se zavzema za neko zmerno varianto matematičnega konstruktivizma, ki v nasprotju z Brouwerjevim radikalnim intuicionizmom sprejema transfinitne množice, vendar subtilno »enumerirane« v ZF-aksiomih. Toda dokončno presojo, ali je Lavinova interpretacija Cantorja nasproti Russellu pravilna ali ne, moramo prepustiti matematikom oziroma zgodovinarjem matematike. Za filozofe pa je zanimiv predvsem Cantorjev odnos do Absoluta, ki mu omogoča tudi »imunost« do paradoksov. Cantor zapiše v *Temeljih splošnega nauka o mnogoterostih* (*Grundlagen* ..., 1883, gl. op. 3, zgoraj), skoraj dobesedno enako in v približno istem času pa tudi v daljši opombi v že citirani razpravi »O neskončni linearni množici točk«, naslednje pomembne in tudi za naš kontekst zelo pomenljive misli:

> »Platonovo pojmovanje neskončnega je povsem drugačno od Aristotelovega […] Za svoja pojmovanja sem našel stične točke tudi v filozofiji Nikolaja iz Kuze. Isto velja za njegovega naslednika Giordana Bruna. – Toda bistvena razlika je v tem, da sem sam različne stopnje pravega neskončnega v razredih števil (I), (II), (III) itn. [te razrede pozneje imenuje kardinalna števila] enkrat za vselej utrdil s pojmom in se šele nato posvetil nalogi, da odnose med neskončnimi števili ne preučim le matematično, marveč jih dokažem in pretehtam tudi v splošnem, kot se pojavljajo v naravi. Nič ne dvomim, da bomo tako prišli vedno dlje, pri čemer ne bomo nikoli naleteli na kako neprekoračljivo mejo, pa tudi ne do vsaj približnega spoznanja Absoluta. Absolut je mogoče zgolj prepoznati, nikoli pa spoznati, niti približno poznati.« (Cantor: 17)

Cantor se navezuje na Platona s *presežnostjo* Absoluta, na Kuzanskega s *simbolnim* »prepoznavanjem« Absoluta, na Bruna z dejansko *neskončnostjo* in *Enim*, ki presežno, (novo)platonsko »zaobsega« vso neskončno raznoliko neskončnost v Sebi, Duhu. Simbolni pomen matematične neskončnosti izrazi v nadaljevanju zgornjega citata, ko pravi, da se mu zdi »absolutno neskončno zaporedje števil v določenem pomenu kar primeren simbol za Absolut« (*ibid*.). Cantor torej razlikuje *tri* ravni neskončnosti: 1. »nepravo« (čeprav v matematiki nepogrešljivo) neskončnost »dodajanja« in »delitve«, ki jo je Aristotel imenoval potencialna neskončnost; 2. »pravo« (aktualno, dejansko) neskončnost transfinitnih števil, ordinalov in kardinalov, ki jih je odkril sam Cantor; in 3. presežno neskončnost Absoluta, ki se v matematični neskončnosti zgolj simbolno prepoznava, nikoli pa pojmovno ne spozna.[22]

Cantorjevo pojmovanje neskončnosti in Absoluta je pravzaprav duhovno blizu tudi Kantu, pri katerem je (meta)fizična neskončnost vselej le regulativna *ideja* razumskemu spoznanju, nikoli pa ni predmetno konstitutivna, transcendentalna *kategorija* razuma. Če bi Kant doživel Cantorjevo odkritje »pravih« (dejanskih) matematičnih neskončnosti, bi bil najbrž ob tem presenečen, ne bi pa to zamajalo samih osnov njegove kritične in agnostične filozofije, morda bi nanje vplivalo celo manj, kot je vplivalo odkritje neevklidskih geometrij na novokantovstvo, predvsem na Ernsta Cassirerja. Kanta in Cantorja povezuje globoko spoznanje, da Absolut nikoli ne more biti dan kot *celota*. Celota je vselej presežna, tudi v kozmologiji, kar je glavni poduk Kantovih antinomij, zlasti prve, ki izvira iz transcendentalne kategorije celote – antinomija nastane, če hoče spoznanje seči preko vsega možnega izkustva prostora in časa. Sama pojma prostora in časa pa nista antinomična, saj smo izkustveno vselej *znotraj* neke sekvence vedno večjih prostorov in časov, toda »celoten« prostor in čas, recimo od *zunaj*, nam nista dana niti v »možnem izkustvu« – zato se je po Kantu nesmiselno spraševati o »celoti« prostora in časa oz. o tem, ali je ta »celota« končna ali neskončna. V sedmem razdelku kozmološke antitetike pod naslovom »Kritična odločitev kozmološkega spora uma s samim seboj« Kant pravi:

> »Če vidim dva stavka: svet <*die Welt*> je neskončen po velikosti in svet je končen po velikosti – postavljena kot medsebojno protislovna, predpostavljam, da je svet (celotna vrsta pojavov) neka stvar po sebi <*ein Ding an sich selbst*>. Potem mi preostane [le to], da poskušam ukiniti <*aufheben*> neskončni ali končni regres <*Regressus*> v vrsti njegovih pojavov. Če pa to predpostavko oziroma ta transcendentalni videz odvzamem in zanikam, da je svet neka stvar po sebi, potem se protislovni konflikt <*Widerstreit*> obeh trditev spremeni v zgolj dialektični, in ker svet sploh ne obstaja po

[22] John Barrow opozarja na bližino Cantorjevega pojmovanja Absoluta z Anzelmovim pojmovanjem Boga, ko pravi: »Zdi se torej, da Cantor razmišlja o Absolutni Neskončnosti tako, kakor je nadškof Anzelm razmišljal o Bogu v svojem slavnem 'ontološkem' dokazu Božjega bivanja: kot o bitju <*being*>, nad katerim si ni mogoče zamisliti večjega« (Barrow: 89).

> sebi (neodvisno od regresivne vrste mojih predstav), ne obstaja niti kot po sebi neskončna, niti kot po sebi končna celota. Celota je le v empiričnem regresu vrste pojavov in sama zase sploh ni dosegljiva. [… In] kar je bilo tu rečeno o prvi kozmološki ideji, namreč o absolutni celoti velikosti v pojavu, to velja tudi za vse [tri] ostale.« (Kant: B 532-33)

Če *celota,* ki je v Kantovi transcendentalni analitiki predmetno konstitutivna kategorija, poseže preko vsega možnega izkustva – tako kot v pojmu *celote sveta* – potem je le še dialektična, umska *regulativna* ideja, ki sama zase ne konstituira nobene predmetnosti, nobene »stvari po sebi«, čeprav je *kot ideja* nujna tudi za razumsko, znanstveno spoznanje, saj razum, ki premerja »vrsto pojavov«, potrebuje »mero«, potrebuje *smer* (klasiki bi rekli *télos*, »cilj«) ter miselno *odprtost* pri spoznavanju sveta. Toda o *ideji* celote pač ne moremo reči, niti da je končna niti da je neskončna. In tako kot pri klasikih, tudi pri Kantu velja, da je *popolnost v celoti*, četudi se slednja izmika spoznanju v neskončnost: »Sama ideja te popolnosti <*Vollständigkeit*> je vselej v umu, ne glede na možnost ali nemožnost, ali jo lahko povežemo z ustreznimi izkustvenimi pojmi ali ne« (Kant: B 444). – Kantova misel, da svet *ne* obstaja kot neka *stvar* po sebi, ali drugače rečeno, da svet »v celoti« ni izkustvena celota, dandanes še vedno velja, *če* s svetom razumemo »vse, kar jè«: Univerzum oz. Vesolje v prvotnem pomenu besede. Toda s stališča sodobne kozmologije Univerzum ni več zgolj »naše« Vesolje – kajti začetek in razvoj našega Vesolja kot *celote* le-to vendarle vzpostavlja kot neko (največjo) »stvar« znotraj našega možnega izkustva – temveč je tista po Kantu presežna in načelno nedosegljiva celota dandanes postal *multiverzum*. Sodobna znanstvena kozmologija govori o multiverzumu (ali multiverzumih), kritična refleksija pa v »celoti« Multiverzuma spet prepoznava presežni *Univerzum*.

Torej, če povzamem: izhajajoč iz ugotovitve, da sodobne teorije multiverzumov segajo ne samo preko zdaj razpoložljivega fizikalnega izkustva, ampak tudi preko vsega možnega izkustva, sem v tem članku poskušal pokazati, da je za sodobno kozmologijo še vedno upravičena in relevantna Kantova kritika, čeprav so se nekatere sestavine te kritike spremenile (z relativnostno teorijo itd.). Spričo možne in smiselne uporabe pojmovnega aparata matematične teorije množic pri analizah teorij multiverzumov se zastavlja filozofsko-logično vprašanje neskončnega regresa v teh teorijah oziroma problem paradoksov hipotetično »najvišjega« Multiverzuma, tj. »multiverzuma vseh multiverzumov«, analogno kot v teoriji množic – v tem pogledu pa velja znova premisliti o Cantorjevem prepričanju o preseżnosti Absoluta v odnosu do njegovih »simbolnih« manifestacij v transfinitnih številih. Cantor sam je bil prepričan kristjan, katolik, vendar je njegovo pojmovanje *ontološke* transcendence neskončnega Absoluta mogoče razumeti tudi drugače, na primer s stališča panteizma, recimo kot *epistemološko* transcendenco-v-imanenci. V kontekstu našega razmišljanja torej lahko, *per analogiam*, naslovimo Cantorjev »poduk« Russellu (in drugim »logicistom«) na sodobne fizike, zagovornike multiverzumov: onstran vseh multiverzumov še vedno ostaja *Univerzum*, eden, edini, absolutni – v duhu. Brez Univerzuma (kozmološkega Absoluta) nobena konsistentna misel o multiverzumu ali multiverzumih sploh ne bi bila mogoča in tega se moramo zavedati, tudi če naše Vesolje »pomnožimo« tako, da ga uvrstimo med množico drugih vesolij, neštetih univerzumov v mnogoterosti Multiverzuma. Ali, drugače rečeno, če bi bila mogoča neka *popolna* teorija Multiverzuma (popolna v smislu logično-semantične popolnosti), bi takšna teorija nujno morala v svojo tematsko domeno vključiti tudi *duha*. Saj brez duha ni Absoluta. To pa bi nadalje pomenilo, da bi se morala fizika znova, drugače in zdaj morda bolj kritično kot nekdaj, spoznavno povezati z meta-fiziko, s filozofijo. Morda pa se to že dogaja.

Literatura

Aczel, Amir (2000). *The Mystery of the Aleph*. New York: Washington Square Press.

Aristotel (2004). *Fizika*, knjige 1-4, prev. Valentin Kalan. Slovenska matica: Ljubljana.

Barrow, John D. (2005). *The Infinite Book*. London: Vintage.

Bostrom, Nick (2002). *Anthropic Bias. Observation Selection Effects in Science and Philosophy*. London: Routledge.

Cantor, Georg (1994). »O neskončni linearni množici točk« (št. 5), prev. Tomaž Erzar. V *Problemi-Eseji* 2-3, str. 7-52.

Carr, Bernard, ur. (2007). *Universe or Multiverse?* Cambridge: Cambridge University Press.

Clegg, Brian (2003). *A Brief History of Infinity*. London: Robinson.

Greene, Brian (2006). *Tkanina vesolja*, prev. Urška Pajer. Tržič: Založba Učila (Žepna knjiga).

Kanitscheider, Bernulf (1991). *Kosmologie. Geschichte und Systematik in philosophischer Perspektive*. Stuttgart: Reclam.

Kant, Immanuel (1998). *Kritik der reinen Vernunft*. Stuttgart: Reclam.

Koyré, Alexandre (1988). *Od sklenjenega sveta do neskončnega univerzuma*, prev. Božidar Kante. Ljubljana: Studia humanitatis.

Lavine, Shaugham (1994). *Understanding the Infinite*. Oxford: Oxford University Press.

Luminet, Jean-Pierre (2008). *The Wraparound Universe*. Wellesley (Massachusetts): A. K. Peters.

Moore, A. W. (1990). *The Infinite*. London: Routledge.

Penrose, Roger (2005). *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*. New York: Vintage Books.

Silk, Joseph (1997). *A Short History of the Universe*. New York: Scientific American Library.

Silk, Joseph (2006). *The Infinite Cosmos*. Oxford: Oxford University Press.

Smullyan, Raymond (1995). *Satan, Cantor in neskončnost*, prev. Meta Lah idr. Kamnik: Logika d.o.o.

Stoeger, W. R. & Ellis, G. F. R. & Kirchner, U. (2006). »Multiverses and Cosmology: Philosophical Issues«. Na spletnem naslovu: arXiv:astro-ph/0407329v2.

Uršič, Marko (1987). *Matrice logosa*. Ljubljana: DZS.

Uršič, Marko (2002). *Štirje časi – Pomlad*. Ljubljana: Cankarjeva založba.

Weeks, Jeffrey R. (1998). *Oblika prostora*, prev. Marino Pavletič. Ljubljana: DMFA.

Paradoxes of Transfinite Cosmology

The first section of the article presents a short survey of the main historical concepts of infinity, especially in Aristotel, Kant and Cantor. In the second section the question is considered whether the modern cosmology has solved the first Kant's antinomy, i.e., whether (our) universe is finite or infinite in space and time, and some issues of modern topology are discussed (torus etc.). In the third section the concept of “multiverse” is introduced, and the methodology of cosmological theories of multiverse(s) is connected with the theory of sets; from this point of view, the concept of “Multiverse of all multiverses” yields to be paradoxical. In the last section of the article, we consider Cantor’s “Absolute” as a possible solution of the paradoxes of infinity, and we state the closeness of this approach to Kant’s conception of the whole(ness) as a “regulative idea”.

Key words: infinity, cosmology, multiverse, paradox, antinomy, Kant, Cantor.