

Marko Uršič, FDV, 2010/11

Geometrijski liki in števila kot simbolne forme

Drugo predavanje: *Asimetrični simboli*

- IV. Eno in mnoštvo, asimetrija prostora in časa
- V. Matematični “zlati rez” v umetnosti in naravi
- VI. Simboli rasti in razvoja: koreni, spirale, fraktali
- VII. Pomen simetrije v sodobni znanosti

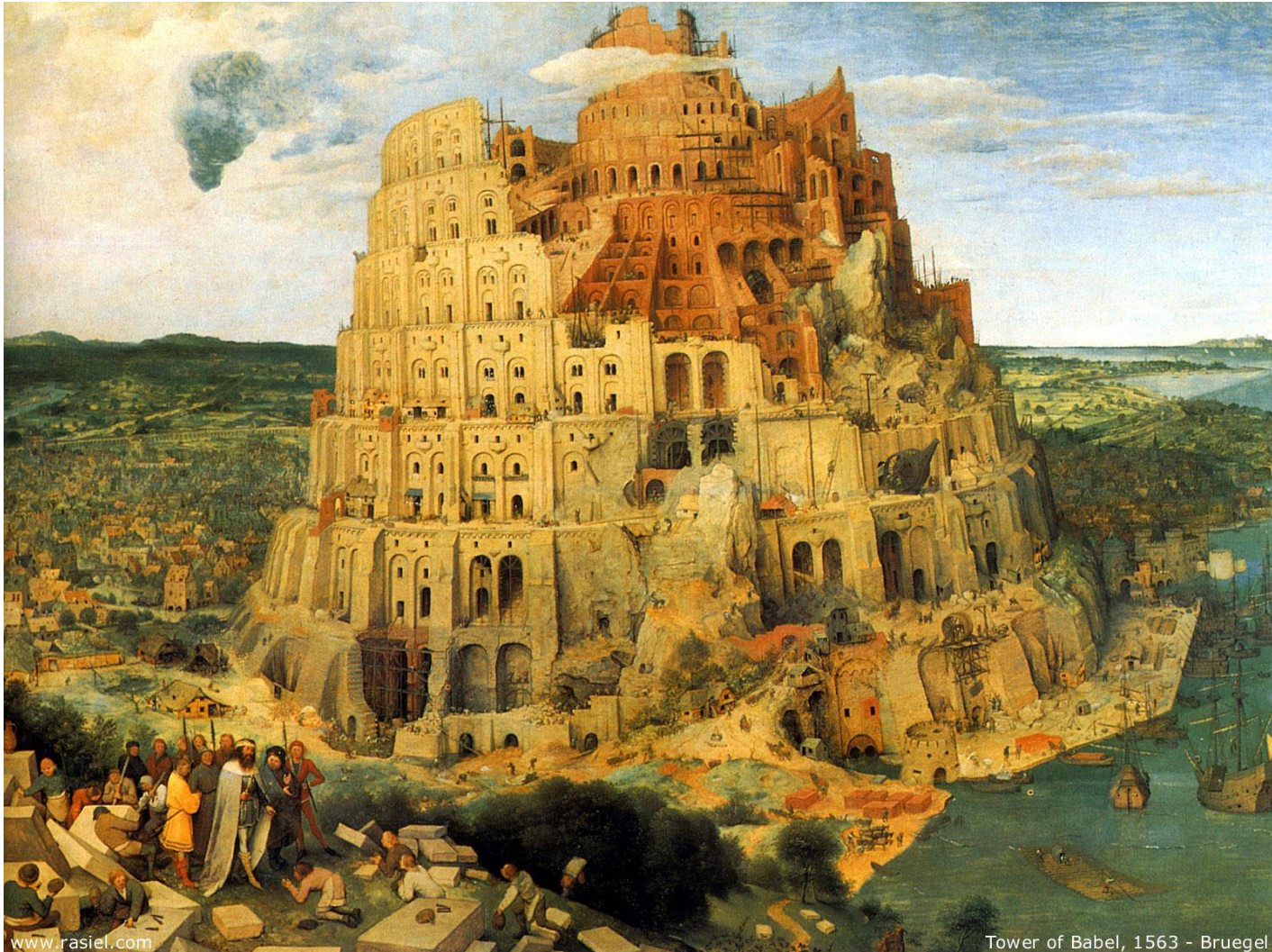
IV/1. Piramide v Gizi, Egipt, 25. st. pr. n. š.



IV/2. Veliki *zigurat* v sumerskem mestu Ur, 21. st. pr. n. š.,
rekonstrukcija v 6. st. pr. n. š., restavriran 1980, Irak



IV/3. Pieter Bruegel, *Babilonski stolp*, 1563
(Umetnostnozgodovinski muzej na Dunaju)



IV/4. Majevska piramida v Chichen-Itzi, Mehika, ~ 1000 n. š.



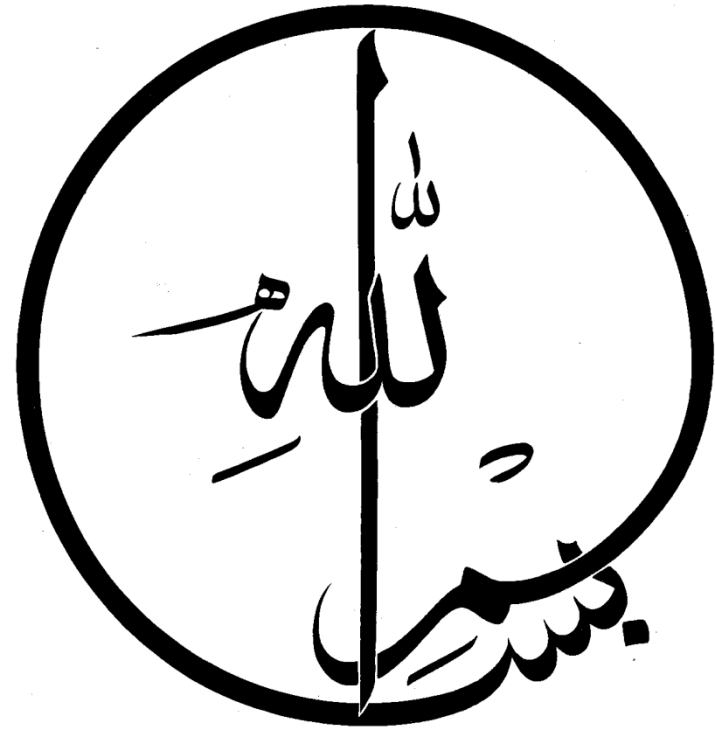
IV/5. Peščeni stožec *Kogetsudai*, Ginkaku-ji, Kjoto



IV/6. Asimetrija (ali “lom simetrije”) v “prvotnem krogu” je nujni pogoj stvarjenja, nastanka *drugega* (dvojega, mnogega) iz *enega*

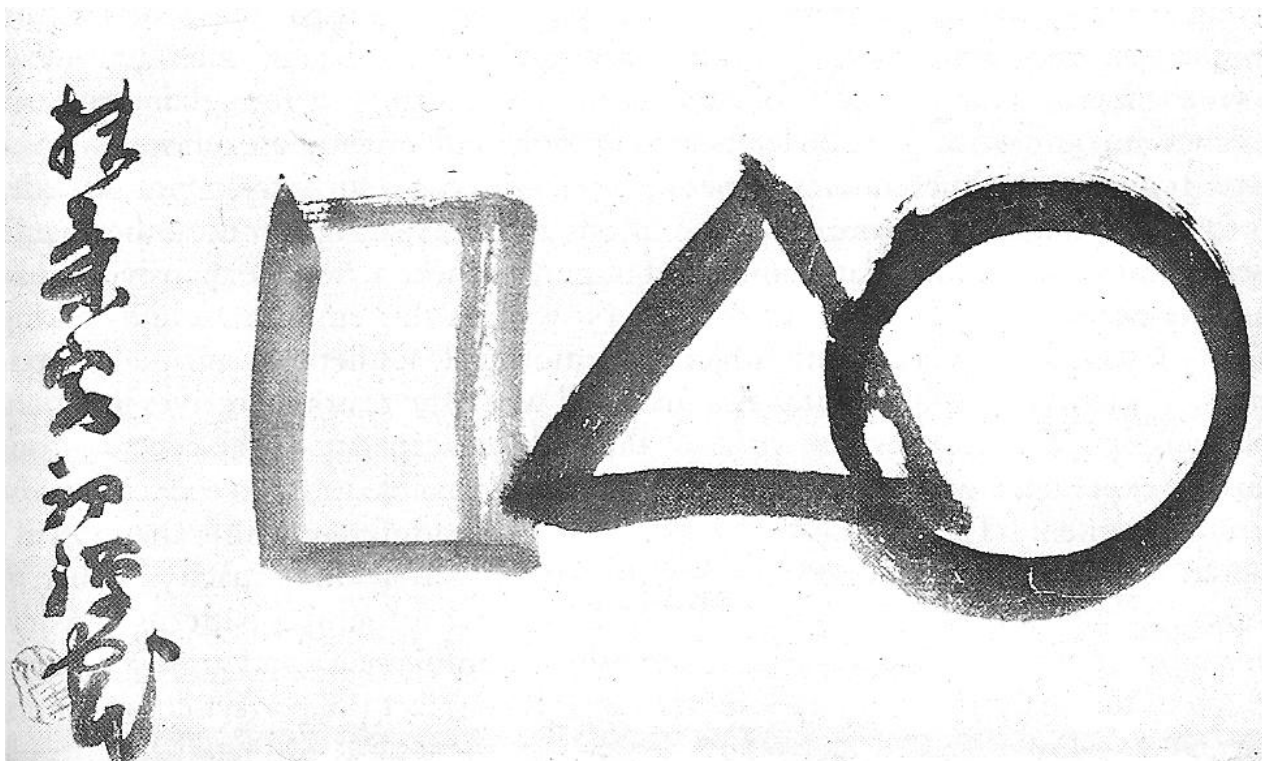


Zenovski krog *enso* na tej kaligrafiji ni povsem sklenjen.



Kaligrafija na začetku *Korana*:
“V imenu Boga” ...

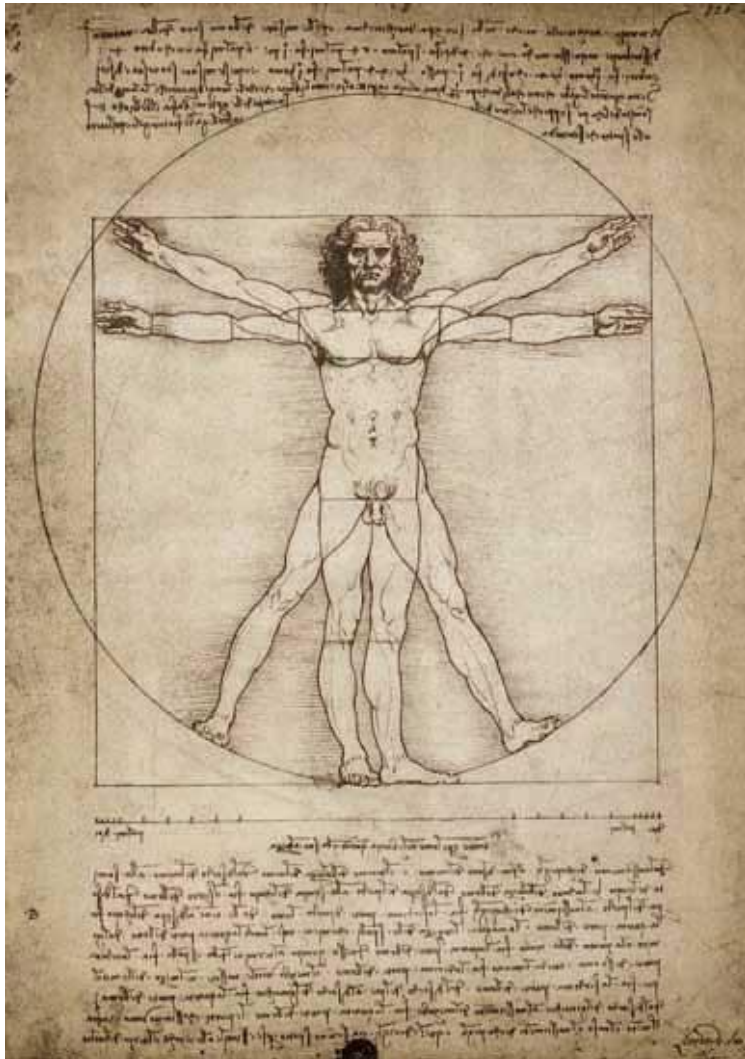
IV/7. Nastajanje množva iz enega



Japonska zenovska kaligrafija lepo prikazuje
“nastanek množva” kot razvoj form (z desne proti levi)
od kroga prek trikotnika do kvadrata

(iz knjige: Robert Lawlor, *Sacred Geometry*, Thames & Hudson,
London, 1994, str.13)

V/1. Leonardo da Vinci: človek, razpet v kvadratu in krogu, risba, 1490, po rimskem arhitektu Vitruviju (1. st. p. n. š.)



Kvadrat simbolizira Zemljo, krog Nebo. Človek je razpet med Nebom in Zemljo.

“Kvadratura kroga” v geometriji ni mogoča, ker je π *iracionalno* število (3,14159...), a vendar jo človeški um na “dialektični” ravni nenehno raz-rešuje.



pa še to:
ne spreglej
asimetričnih
elementov
te risbe

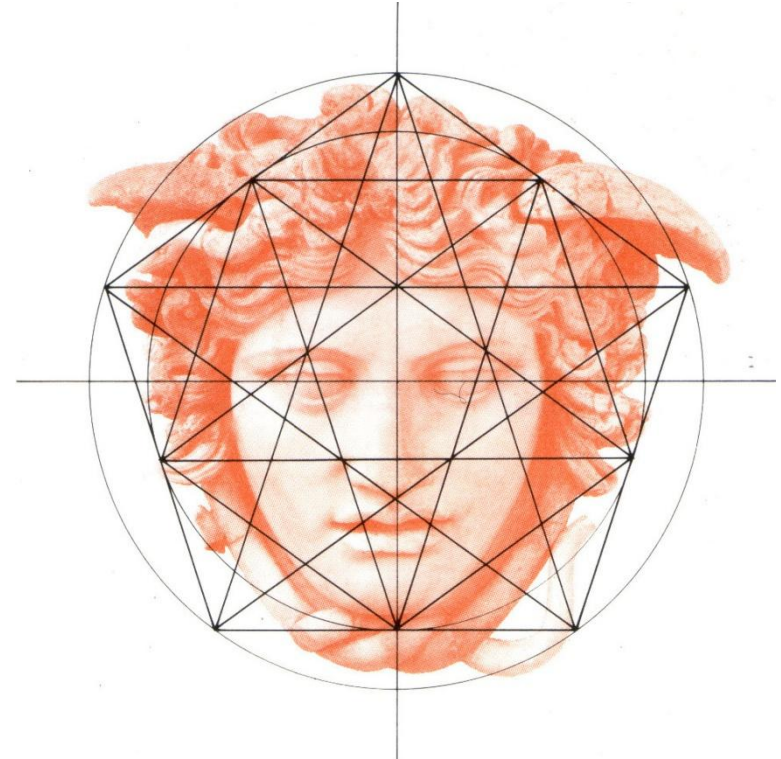
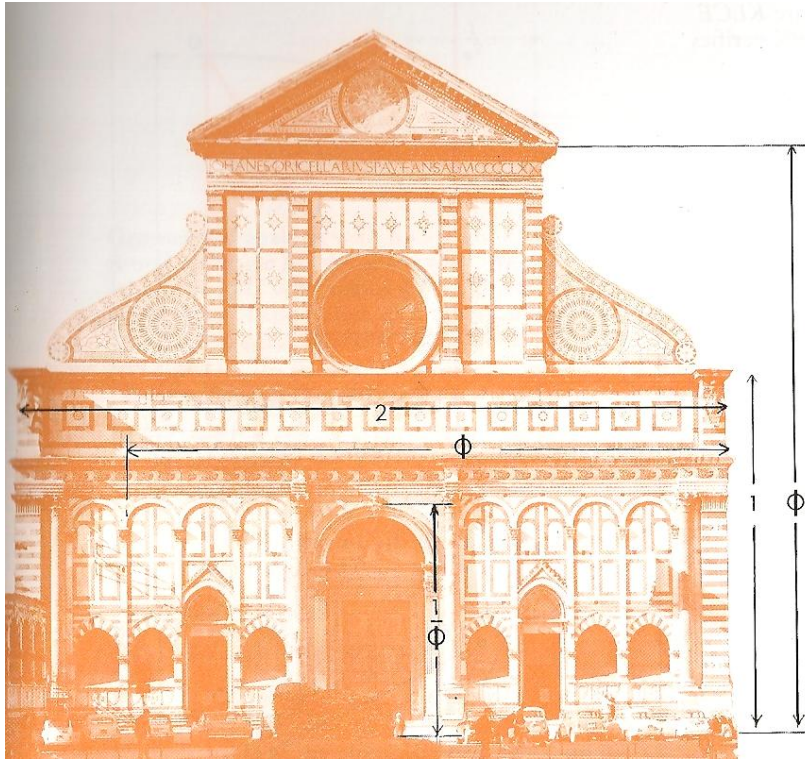
Naš, evropski
(po izvoru italijanski)
kovanec za 1 evro:
upajmo na rešitev
ekonomsko-politične
“kvadrature kroga”.
Nota bene: na kovancu
zemeljski človek
“zakrije” nebeškega.

V/2. Učenjaki v obdobju renesanse so častili geometrijo



Fra Luca Pacioli, renesančni matematik in Leonardov prijatelj, kontemplira neko “skoraj idealno” geometrijsko telo (avtor slike je Jacopo de' Barbari, 1495).

V/3. V renesansi so še posebej častili “zlati rez”

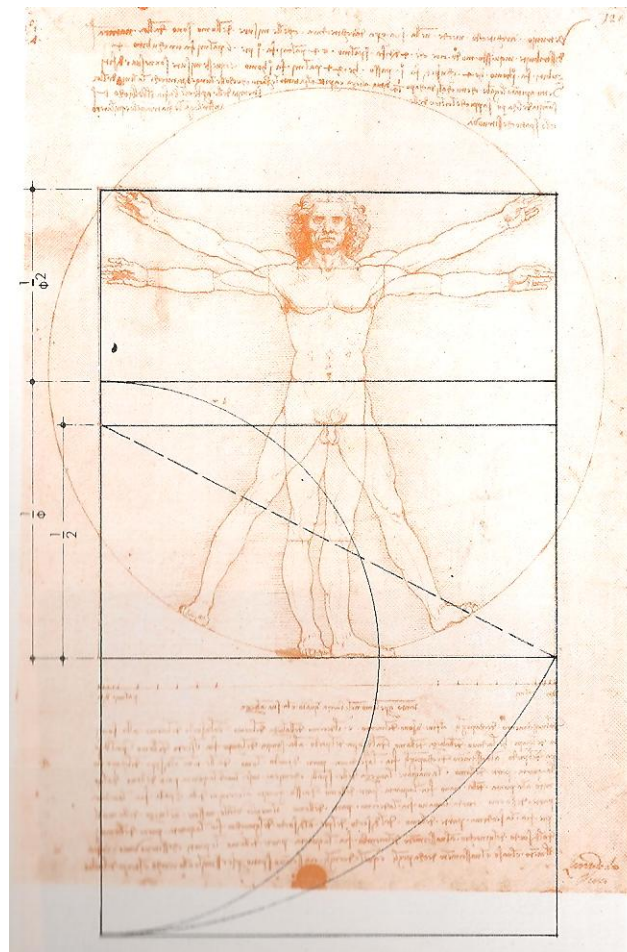
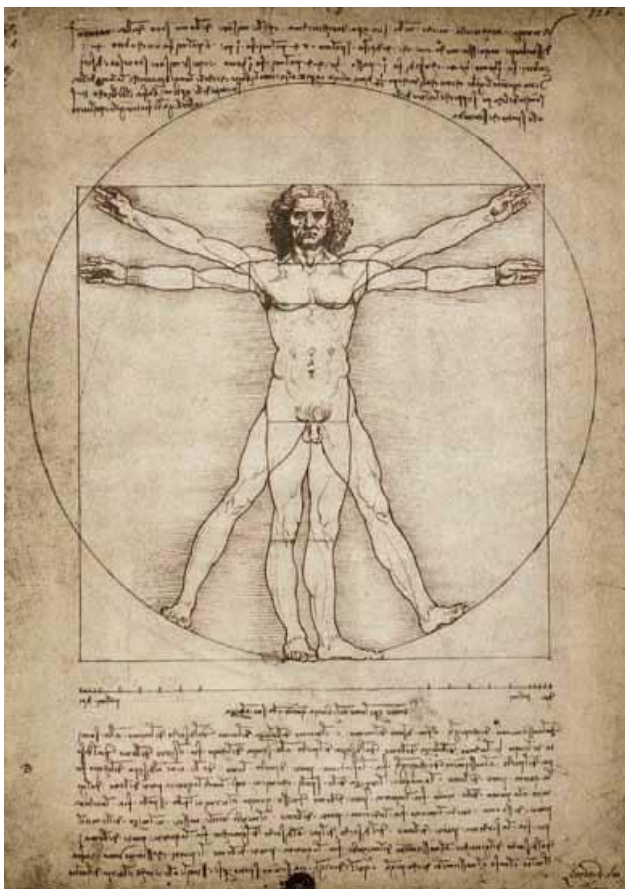


Na *levi* sliki so označeni trije zlati rezi ($1 : \Phi$) na fasadi cerkve Santa Maria Novella v Firencah, ki jo je projektiral Leon Battista Alberti (15. st.).

Na *desni* sliki je geometrijska analiza podobe Hermesa (ali Merkurja), grškega boga, po katerem se imenuje “hermetizem”; v enakostraničnem peterokotniku sta stranica in diagonala v razmerju zlatega reza.

(Obe sliki sta iz knjige: Robert Lawlor, *Sacred Geometry*, str. 53.)

V/4. Tudi v Leonardovem *Anthroposu* se skriva zlati rez ...



... popek “prereže” višino človeka v zlatem rezu.

V/5. Kaj je “zlati rez”?

Zlati rez je vrsta “kontinuiranega proporca”.

Kaj je proporc (ali sorazmerje)? Proporc je razmerje dveh ali več razmerij, npr. $a : b = c : d$.

Kaj je kontinuiran proporc? To je proporc, pri katerem je drugi člen prvega razmerja enak prvemu členu drugega razmerja, npr. $a : b = b : c$.

Kaj je zlati rez? To je kontinuiran proporc, pri katerem je zadnji, tretji člen vsota prvega in drugega; zlati rez je torej razmerje med a in b (pri čemer naj bo $a < b$), če velja enačba:

$$a : b = b : (a + b),$$

in če izberemo $a = 1$ (enota), iz enačbe izračunamo število b

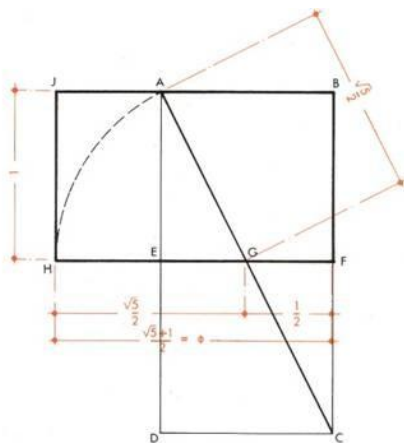
$$b = (\sqrt{5}+1)/2 = 1,61803\dots$$

Število $\sqrt{5}$, kvadratni koren števila 5, je “iracionalno” število (ni ulomek), zato je iracionalno število tudi $(\sqrt{5}+1)/2$, ki ga imenujemo “zlatorezno” število Φ .

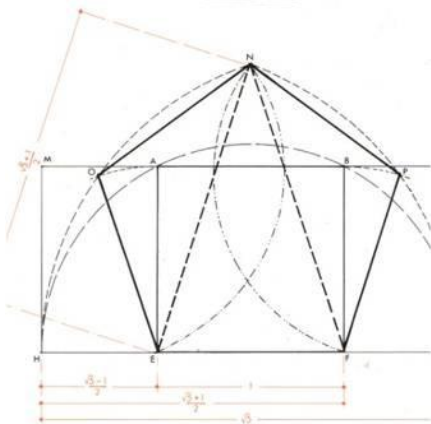
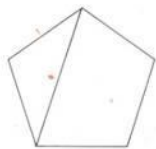
Ali, drugače rečeno: če sta a in b daljici, sta v proporcju zlatega reza, če je njuno razmerje enako številu Φ .

Lahko pa zlati rez izrazimo še drugače: če hočemo dano enoto (1) “prerezati” z zlatim rezom na dva dela (označimo ju m in n), izračunamo, da znaša večji del reza $m = 1/\Phi \simeq 0,61803$ in manjši del reza $n = 1/\Phi^2 \simeq 0,38195$, kajti zgornjo enačbo lahko zapišemo tudi: $1/\Phi + 1/\Phi^2 = 1$.

Geometrijski skici nam kažeta, kako z ravnilom in šestilom iz kvadrata (zgoraj) in/ali iz pravičnega peterokotnika (spodaj) s stranico dolžine 1 narišemo daljico, dolgo $(\sqrt{5}+1)/2$ oziroma Φ . Zlatorezno število Φ je diagonala pravičnega peterokotnika s stranico 1.



$$EN = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$



Skici sta iz knjige:
Robert Lawlor,
Sacred Geometry, 1994.

V/6. Zlatorezno število Φ in Fibonaccijeva vrsta



Morski polž *nautilus pompilius* je zvit v logaritemsko spiralo, ki se širi v proporciju zlatega reza oziroma Fibonaccijevih števil. – Zgolj naključje?



spirala polža amonita,
prerez

Johannes Kepler je dejal: “Geometrija ima dva velika zaklada: Pitagorov izrek in zlati rez.” (Robert Lawler, *Sacred Geometry*, str. 53.)

Zlatorezno število Φ ima zanimive, nenavadne aritmetične lastnosti:

$$1 + \Phi = \Phi \cdot \Phi = \Phi^2$$

$$\Phi + \Phi^2 = \Phi \cdot \Phi^2 = \Phi^3 \text{ itd.}$$

Obstaja tudi nepojasnjena povezava števila Φ s Fibonaccijevim zaporedjem (Leonardo Fibonacci iz Pise, 12. st.), ki ga dobimo po formuli, da je vsako naslednje število v zaporedju vsota prejšnjih dveh:

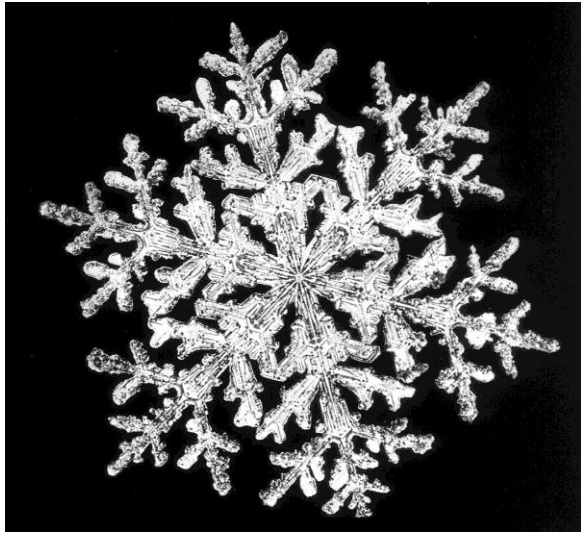
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \dots = \text{Fibonaccijeva vrsta števil.}$$

Povezava je v tem, da se vrednost količnika med poljubnim številom v tem zaporedju in njegovim predhodnikom približno ujema s številom $\Phi = 1,618\dots$, tj., dokaj blizu se “vrti” okrog njegove vrednosti, “teži” k njej; npr., $21/13 = 1,615\dots$, $34/21 = 1,619\dots$, $55/34 = 1,617$ ipd. – Je mogoče, da bi bilo to zgolj naključje?

Podobno kakor zlati rez na daljici lahko definiramo “**zlati kót**” na krožnici: $2\pi = 360^\circ$ razdelimo v razmerju: $\sim 137,5^\circ : 222,5^\circ$.

V naravi so mnoge strukture urejene v zlatem kotu, npr. polžje lupine; zlati kot je pomemben za razporeditev listov (*phyllotaxis*) okrog stebela ali v cvetovih (pogosto so medsebojno zasukani za $\sim 137,5^\circ$). Biologi razlagajo ta pojav z najboljšim evolucijskim izkoristkom (maksimalna rast), to pa je še en dokaz za poseben pomen zlatoreznega števila Φ .

V/7. “Tapiserija narave se tke sama”

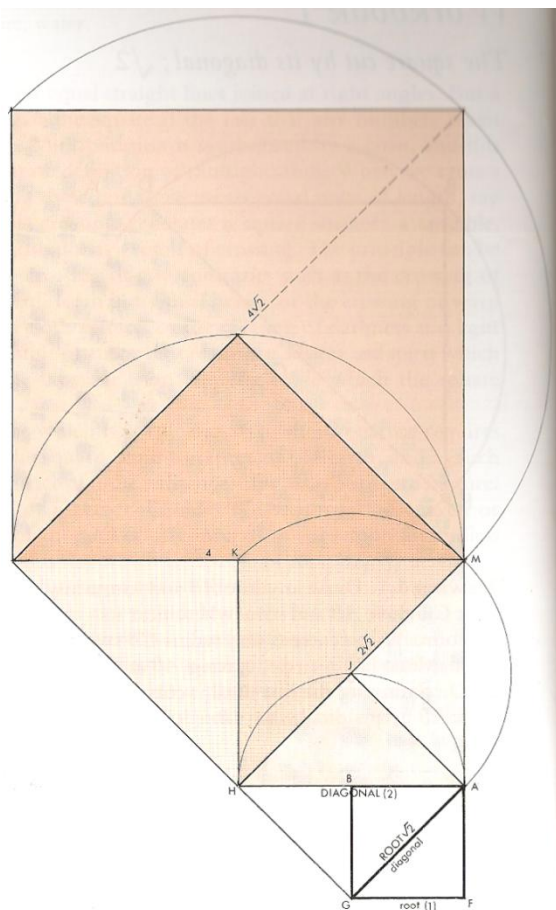


Philip Ball v knjigi z naslovom *Sámo-ustvarjena tapiserija, oblikovanje vzorcev v naravi* (2004) navaja številne primere naravnih pojavov in/ali bitij, katerih kompleksna zgradba se oblikuje v “vmesni coni” med biološko evolucijo in fiziko oz. matematiko. (Slika z naslovnice *desno*.)

- “Kompleksna oblika ne zahteva nujno organskega vira, a podobno ga geometrijska oblika ne izključuje” (str. 4).

Torej ne le neživa narava (npr. kristali), ampak tudi živa narava tke svojo kompleksno “tapiserijo” vsaj deloma na osnovi matematičnih zakonitosti.

VI/1. Rast geometričnih struktur iz aritmetičnih korenov



Iz knjige: Robert Lawlor,
Sacred Geometry, 1994, str. 26

Simbol prvotnega Enega (izvorne enosti) je običajno krog, lahko pa je to tudi drugi, bolj “zemeljski” od obeh glavnih simetričnih likov – kvadrat.

Sprašujemo se: kako *eno* postane *mного*?

Recimo, kako iz enega kvadrata nastane množstvo kvadratov? – Seveda na več načinov, lahko tudi z delitvijo kvadrata po diagonali, pri čemer je “seme” množstva kvadratni *koren* iz 2. (Gl. sliko *levo*.)

Zakaj obratno operacijo od kvadriranja (kubiranja itd.) imenujemo “korenjenje”? – Zato, ker se od ploskve ali telesa vračamo k izvorni daljici, “h korenu”.
V življenju pa so *koreni izvori rasti* ...

Spomnimo se, da se množstvo celic živega organizma poraja iz *delitve* matične celice.

In tudi polovica strune zveni z dvakrat višjim tonom.

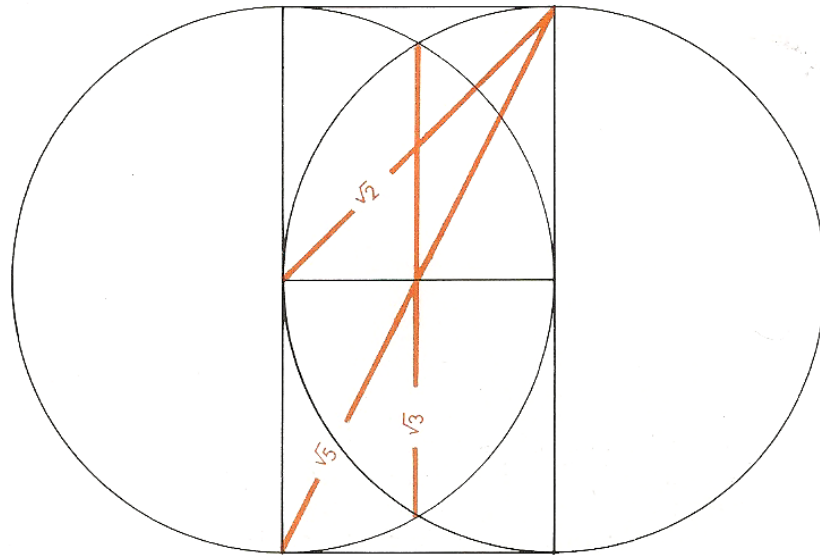
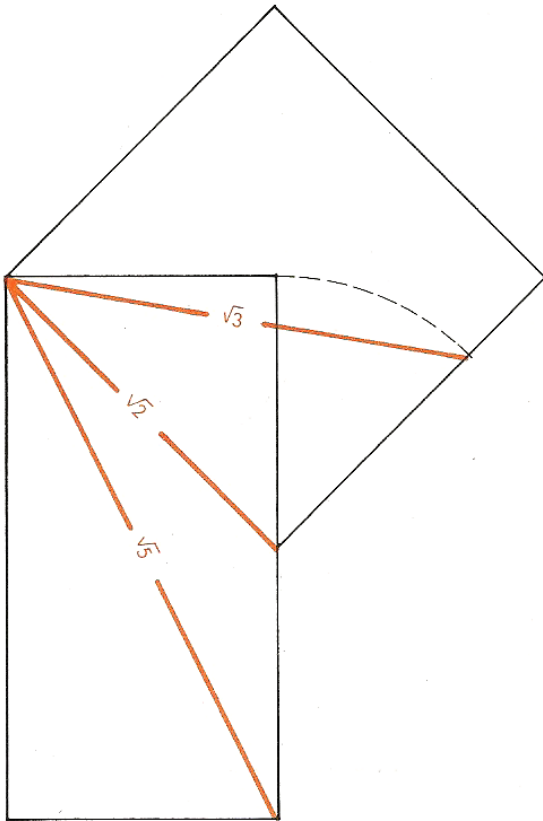
“Kvadratni koren iz 2 predstavlja *moč pomnoževanja*, ki se lahko razteza bodisi v smeri neskončno velikega ali neskončno majhnega.” (R. Lawlor, *op. cit.*, str. 28)

VI/2. Simbolno zanimivi koreni so “iracionalna števila”

$\sqrt{2}$ je dolžina diagonale kvadrata s stranico 1,
 $\sqrt{5}$ pa diagonale pravokotnika, sestavljenega iz
dveh kvadratov s stranico 1.

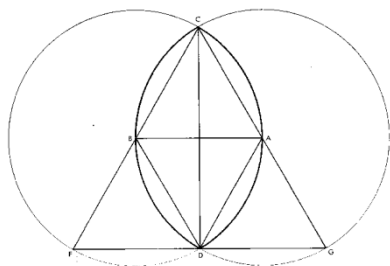
$\sqrt{3}$ je dolžina diagonale kocke s stranico 1.

O tem se lahko prepričamo s Pitagorovim izrekom.

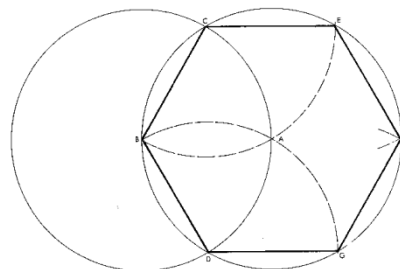


$\sqrt{3}$ je tudi višina geometrijskega lika, ki nastane kot presek dveh enakih krogov, katerih oboda se medsebojno dotikata njunih premerov – to je *vesica piscis*, gl. →

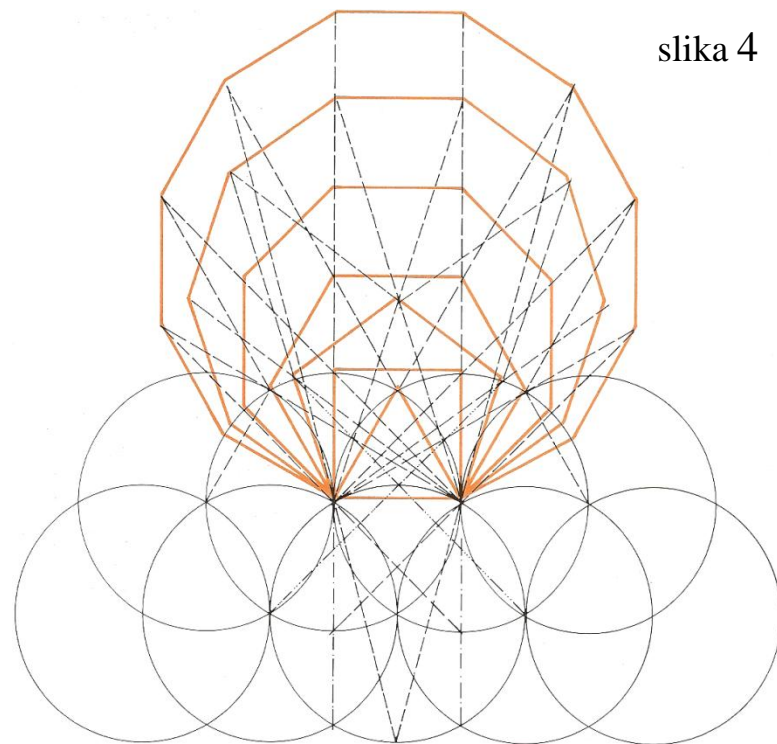
VI/3. *Vesica piscis* (“ribji mehur”) kot “seme” geometrijskega drevesa pravilnih mnogokotnikov



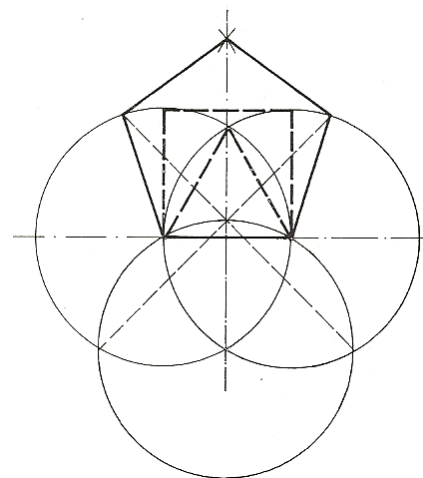
slika 1



slika 2



slika 4



slika 3

Slika (1): višina *vesicae piscis* $\sqrt{3}$ je enaka višini večjega enakostraničnega trikotnika s stranico dolžine 2 (polmer krogov je 1).

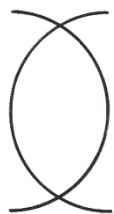
Slika (2): *vesica* in šesterokotnik

Slika (3): *vesica* kot “seme” prvih treh enakostraničnih mnogokotnikov: trikotnika, kvadrata in peterokotnika

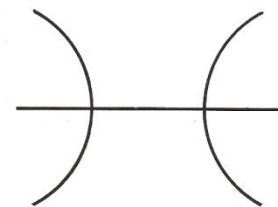
Slika (4): *vesica* kot “seme” celega drevesa pravilnih mnogokotnikov.

Ne spreglej: kot izvor rasti drevesa tu nastopata dva kroga.

VI/4. Kristus v “mandorli” (v avri oblike *vesica piscis*) nad glavnim portalom katedrale v Chartresu, 13. st.



dve varianti astrološkega znamenja “Ribi”,
znamenja “obdobja Kristusa”,
ki ga najdemo tudi na stenah
zgodnjekrščanskih katakomb



VI/5. Spirale so klesali v kamen že v poznem neolitiku



Tempelj v Al Tarxienu
na Malti, 24. st. pr. n. š.



Kamen na pragu tumula (gomile),
New Grange, Irska,
4. ali 3. tisočletje pr. n. š.

VI/6. Dve spirali iz dveh kultur



Duša na poti v onstranstvo,
grški nagrobnik,
Atene, 4. st. pr. n. š.

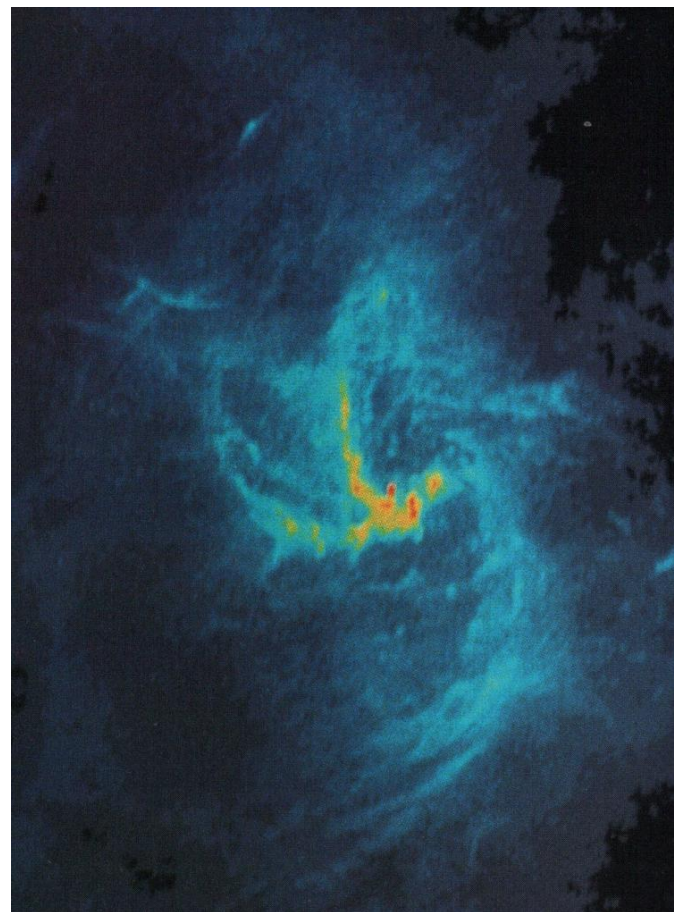


Ognjena spirala,
Skrivnost zlatega cveta,
krona, Kitajska, 11. st.

VI/7. Velika spiralna galaksija v ozvezdju Andromede,
“sestrica” naše Galaksije, oddaljena $\sim 2,3$ milijona svetlobnih let



VI/8. Dve galaktični spirali

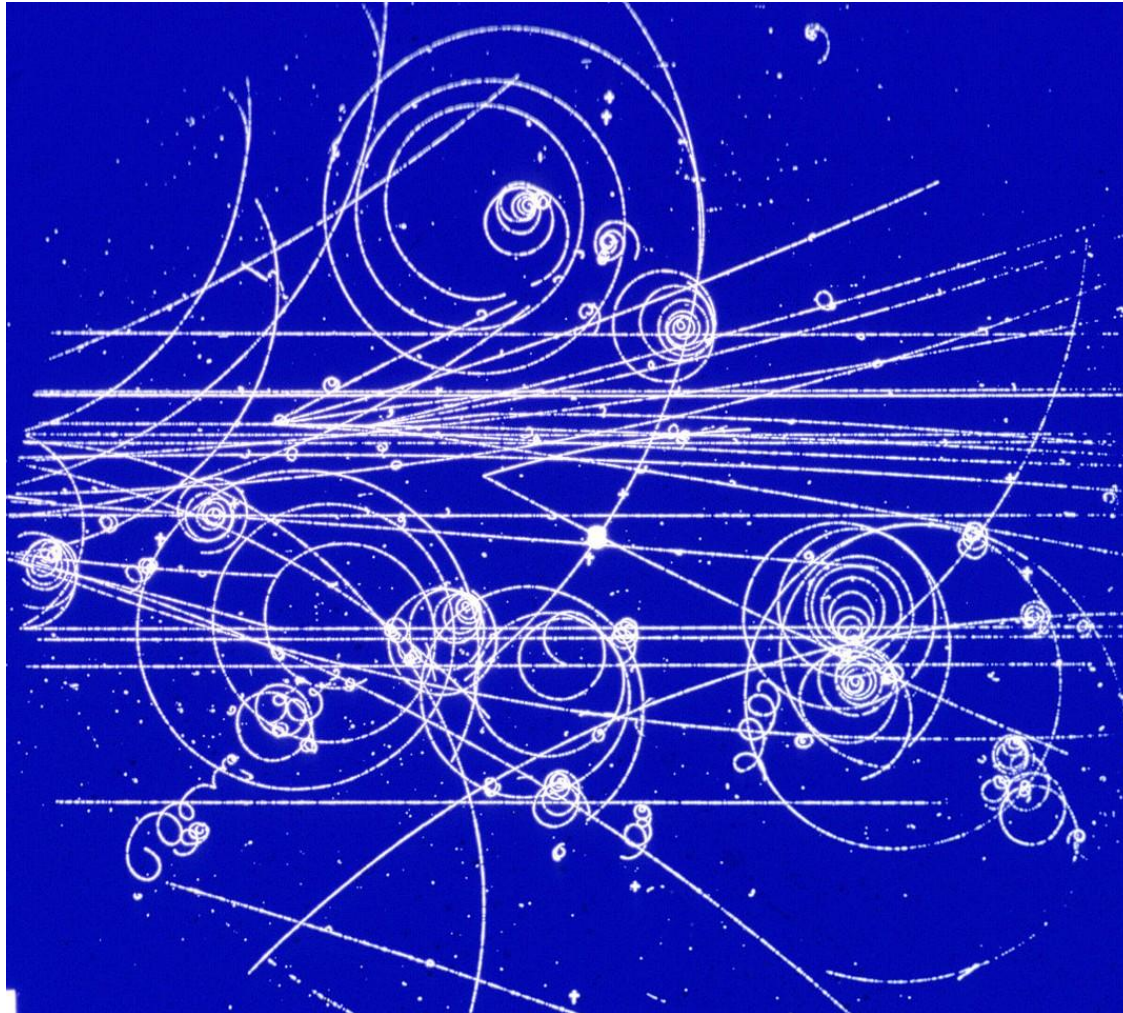


Spiralna galaksija, imenovana “Vetrnica” (*levo*) in jedro naše Galaksije, Rimske ali Mlečne ceste, posneto v infrardeči svetlobi (*desno*)

VI/9. Spiralna galaksija, imenovana “Vrtinec”,
ki “žre” svojo manjšo sosedo



VI/10. Spiralne poti elementarnih delcev, posnete v
“mehurčni komori” pospeševalnika v Ženevi



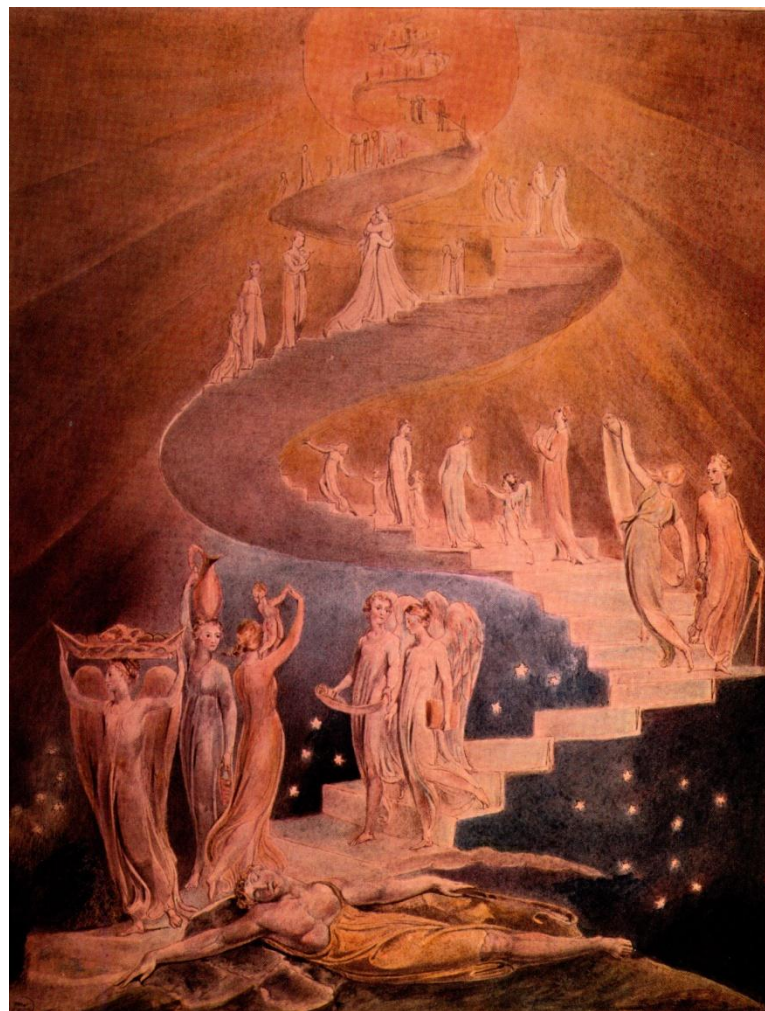
VI/11. Vincent van Gogh, *Zvezdna noč*, olje na platnu, 1889



VI/12. Dve spirali, poti duhovnega vzpona



Minaret mošeje v Samarri,
Irak, 9. st.



William Blake, *Jakobova lestev*,
ok. 1800

VI/13. ... še dvoje spiralnih stopnic

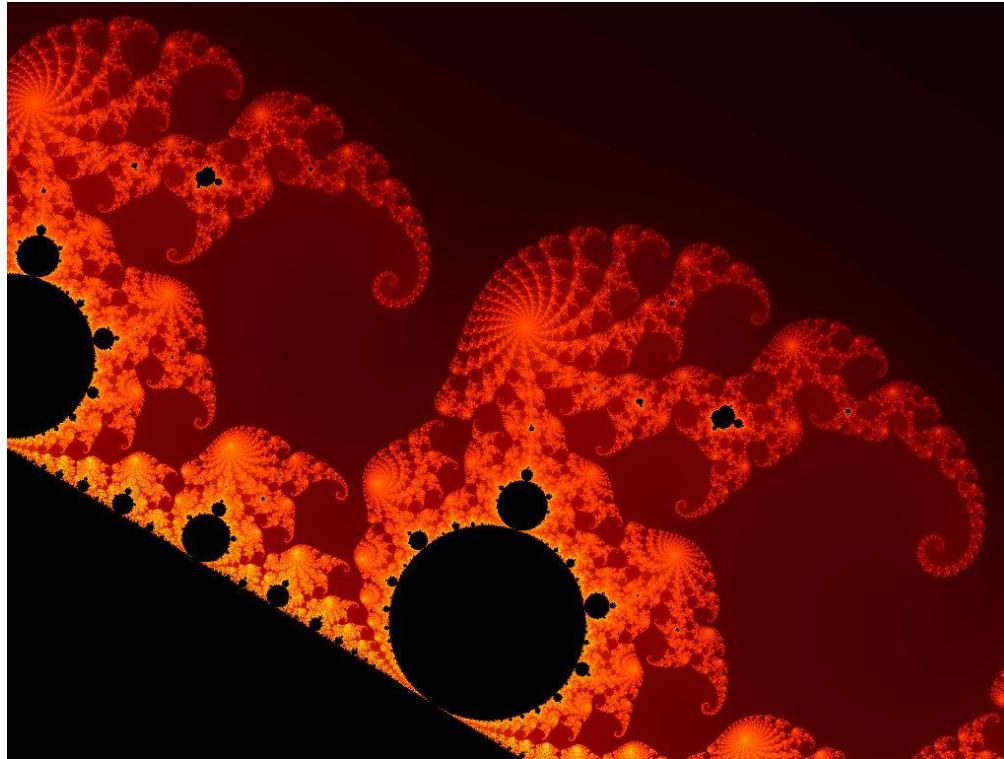


Levo: Rembrandt van Rijn,
Filozof pri meditaciji, 1632

Desno: Vladimir Šubic,
spiralno stopnišče ljubljanskega
Nebotičnika, 1933



VI/14. Neskončna kompleksnost “fraktalov”



Značilnost fraktalov, matematičnih “objektov”, ki jih računalniško generirajo sorazmerno preproste formule, je njihova strukturna “vertikalna sámopodobnost”: podobe, figure se ponavljajo v detajlih, ki jih vidimo v vse večjih in večjih povečavah, vendar pa nobena ponovitev ni povsem enaka prejšnji, torej gre za “kaotično” asimetrijo v simetriji. Na sliki je detajl znamenitega Mandelbrotovega fraktala, 1977.

VI/15. Mandelbrotova fraktalna množica (malce podrobnejša razlaga)

Za teorijo kaosa posebno zanimivi in značilni so tisti čudni privlačniki, katerih topologija razodeva “vertikalno”, globinsko *sámopodobnost* na različnih velikostnih ravneh - **fraktali**.

Benoît Mandelbrot: *Fraktalna geometrija narave* (*The Fractal Geometry of Nature*, 1977). Sam izraz “fraktal” (iz lat. *fractus*: zlomljen), s katerim je Mandelbrot poimenoval te “kaotične” strukture, se nanaša na “zlomljene” črte ali površine, ki so sámopodobne na različnih stopnjah povečave vse do najmanjših detajlov (npr. skalnata obala ali snežinka).

Pravilo (“recept”) za konstrukcijo Mandelbrotove množice:

$$z \rightarrow z^2 + c$$

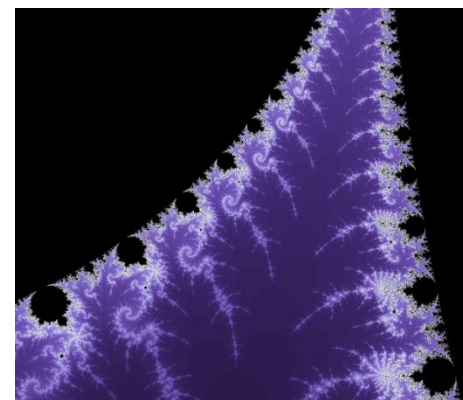
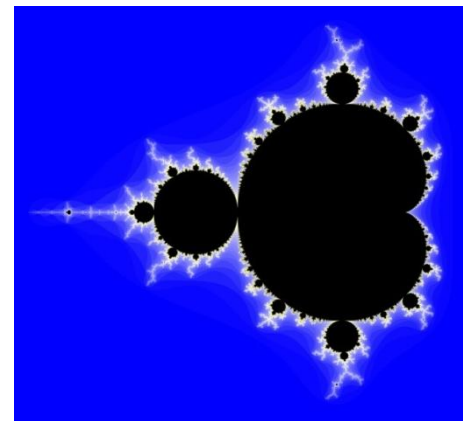
Znaka z in c pomenita “kompleksni števili”, znak \rightarrow pa “iteracijo”, tj. ponavljanje sámónanašajoče se “zanke”, s katero dobimo serijo števil $\{z_0, z_1, z_2, z_3 \dots\}$...

Nadaljno razlago gl. v knjigi: M. Uršič, *Daljna bližina neba*, str. 412-13.

Znani matematik **Roger Penrose** je zapisal, da je Mandelbrotova množica najbolj kompleksen matematični objekt.

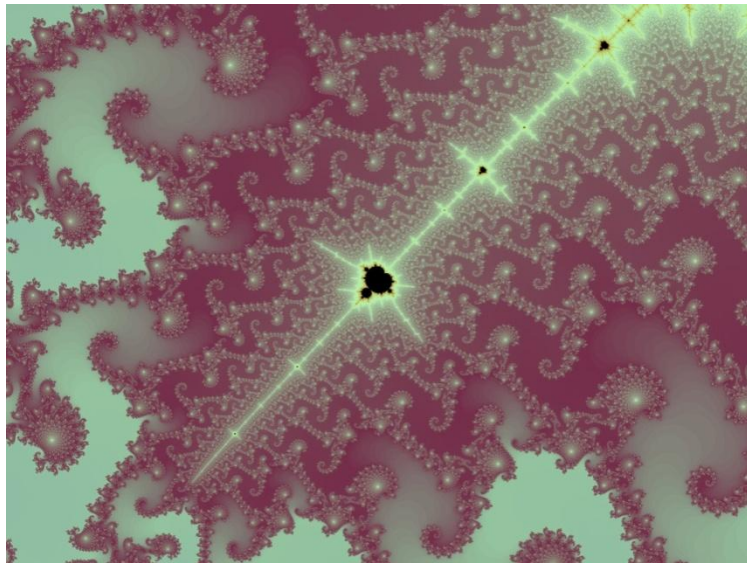
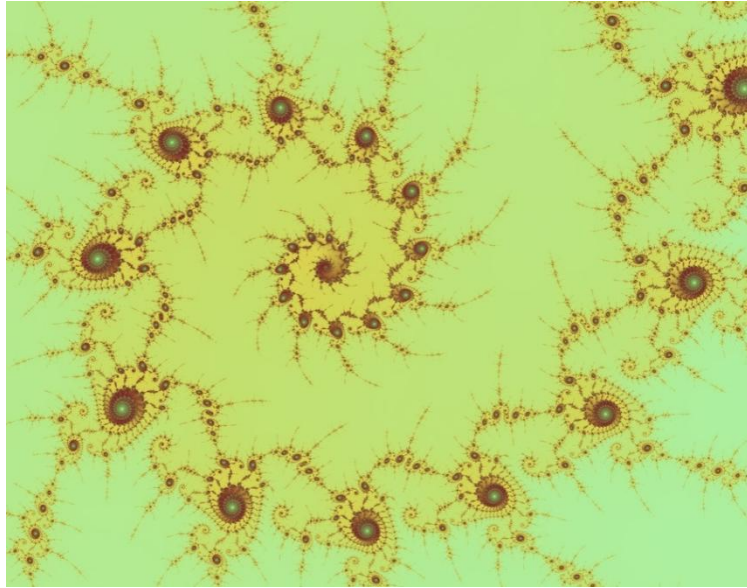
Filozofsko vprašanje: Kako je mogoče, da tako preprosta formula porojeva neskončno kompleksnost?

Od kod prihajajo vsi ti “kaotično” urejeni vzorci? Ali nastajajo iz pravila “spontano”? – Tako se zdi, toda od kod samo pravilo?

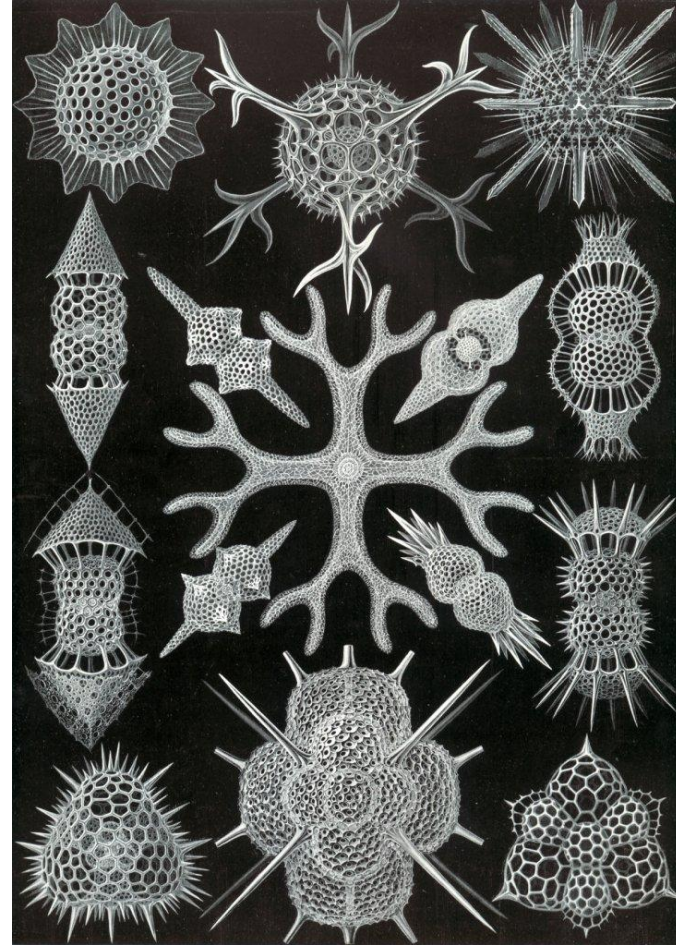
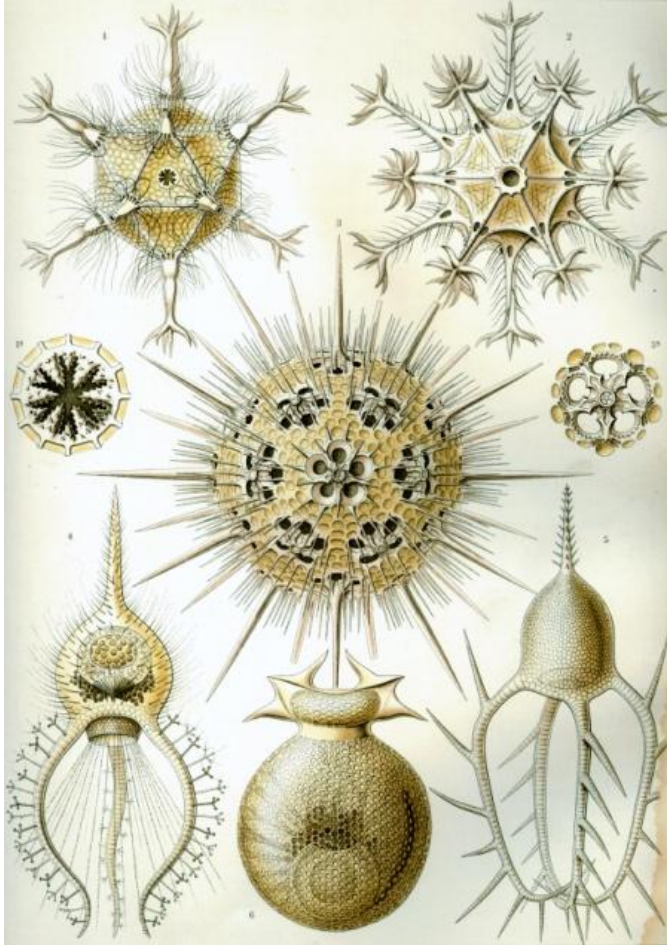


Mandelbrotova fraktalna množica (spodaj detajl): neskončna kompleksnost variacij sámopodobnosti izvira iz preprostega pravila: $z \rightarrow z^2 + c$.

VI/16. Računalniške (*levo*) in naravne fraktalne strukture (*desno*)



VII/1. Vidna simetrija v naravi

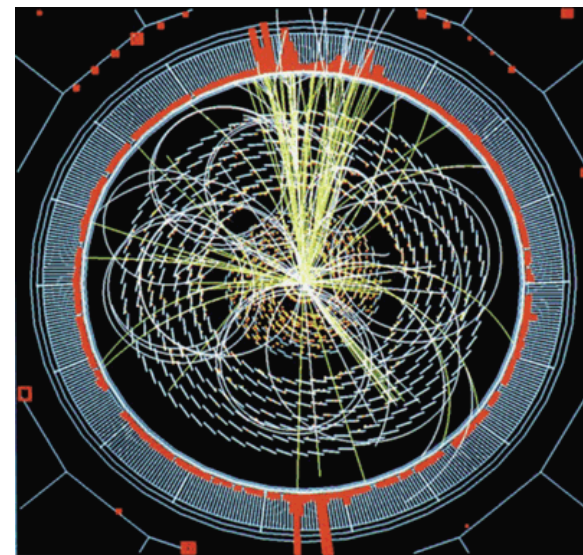


Ernst Haeckel: ogrodja mreževcev, enoceličarjev v planktonu
iz zoološkega atlasa *Umetniške oblike narave*, 1904

VII/2. Sodobna znanost: nevidne simetrije kot teoretske “invariance”

Steven **Weinberg**, sodobni fizik in kozmolog, je prejel (skupaj z Abdusom Salamom, 1979) Nobelovo nagrado za odkritje teoretske simetrije med elektromagnetno in šibko jedrsko silo. To je bil pomemben korak h “Končni teoriji” <*Final Theory*> osnovnih delcev in/ali sil, vendar takšna Teorija še danes ni najdena oziroma potrjena. Weinberg je v svoji poljudni knjigi *Sanje o končni teoriji* (1993) zapisal:

- “Simetrijsko načelo opišemo s preprosto trditvijo, da je videz nekega predmeta enak iz različnih točk, s katerih ga opazujemo. [...] Simetrije, ki so v naravi zares pomembne, niso simetrije o *predmetih*, temveč simetrije *zakonitosti*”.
- “Simetrijo naravnih zakonitosti opredelimo takole: ko spremenimo gledišče, s katerega opazujemo naravne pojave, se naravne zakonitosti ne spremenijo. Takšnim simetrijam pogosto rečemo načela *invariance*.”

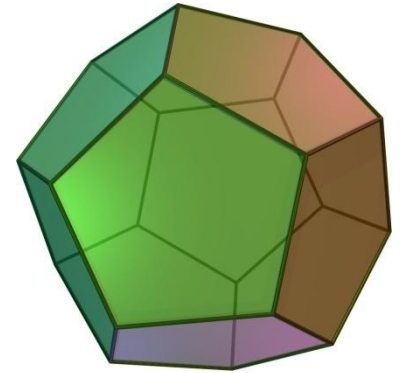


iskanje potrditve
teoretskih simetrij
v pospeševalnikih
→ “Standardni model”
osnovnih delcev in/ali sil

VII/3. Cvetlica in dodekaeder

Lee Smolin, *The Life of Cosmos* (1997), 13. pogl.: “Cvetlica in dodekaeder”, odlomek:

- “Od Pitagore do teorije strun je bila želja razumeti naravo uovirjena s platonskim idealom, da je svet odraz neke popolne matematične forme” – **toda**:
- “Pomislimo, na primer, na cvetlico in dodekaeder. Oba sta lepa in urejena in zdi se, da cvetlica ni nič manj simetrična kot geometrijska konstrukcija. Razlikujeta pa se v načinu, kako ju je moč ustvariti. Dodekaeder je eksakten izraz neke določene simetrijske grupe, ki jo lahko zapišemo v eni vrstici simbolov. Četudi ne morem narediti popolnega dodekaedra, lahko naredim njegovo precej dobro reprezentacijo [...], toda kljub nepopolnosti cvetlice ni nobenega načina, po katerem bi jo lahko jaz sam ustvaril. Cvetlica je produkt velikanskega sistema, ki se razteza daleč nazaj v času. Njena lepota je rezultat milijard let napredujoče evolucije – akomuliranih odkritij slepega statističnega procesa; njen pomen je njena vloga v mnogo večjem ekološkem sistemu, ki obsega mnoge druge organizme.” (Smolin, *op. cit.*, 190)



... in za konec: Čudovita simetrija v asimetriji narave

