Logična odločljivost in paradoks lažnivca

MARKO URŠIČ

Odločljivost nekega stavka (formule) v logiki pomeni možnost, da v končnem postopku (algoritmu) odločimo, ali je ta stavek *logično* resničen ali ne. Pri vsakem bolj zapletenem stavku to ni očitno oz. »intuitivno« razvidno, zato moramo uporabiti določen postopek, ki stavek prevede v drugi, logično ekvivalentni stavek take oblike, da je njegova resničnost ali neresničnost neposredno razvidna.

V primarni (propozicionalni) logiki glede odločljivosti nimamo večjih težav, kajti na razpolago imamo dva zanesljiva postopka preverjanja: 1) matrično verifikacijo, 2) prevod v konjunktivno normalno formo (KNF). Podobno vlogo kot v propozicionalnem računu KNF ima v funkcijskem računu (prve stopnje) Skolemova forma:

$$(\exists x_1) \dots (\exists x_k)(\forall y_1) \dots (\forall y_m) M(x_1, \dots x_k; y_1, \dots y_m).$$

Težava odločitvenega postopka s Skolemovo formo pa je v tem, da ta metoda za funkcijski račun kot celoto ni univerzalna, ampak omogoča odločitveni algoritem samo v specifičnih primerih.[1]

V t. i. splošni logiki (angl.: general logic), tj. v funkcijskem računu prve in višjih stopenj, problem odločljivosti ni univerzalno rešljiv. Ta teza, ki je v meta-logiki znana kot Churchev teorem iz leta 1936 ali generaliziran Gödelov teorem[2], pravi za funkcijski (ali predikativni) račun, da je principielno neodločljiv; to pomeni, da ne samo, da odločitveni postopek za funkcijski račun še ni bil najden, ampak da ga principielno ni mogoče najti. V tem spisu bi rad nakazal zvezo med neodločljivostjo funkcijskega računa in semantičnimi paradoksi tipa »Lažem«.

Neodločljivost za formalno aritmetiko je dokazal K. Gödel (1931).[3] Na osnovi njegovega dokaza pa so analogno za funkcijski račun (splošno logiko) dokazali Church (1936), pozneje pa nekoliko drugače Tarski, Mostowski & Robinson (1953).[4] Skušal bom podati delno modificiran in malce poenostavljen dokaz teh treh. Pri tem velja poudariti, da je pionir dokazovanja principielne neodločljivosti formalnih

[1] g. Kneale: »The Development of Logic«, str. 724—727; Church: »Introduction to Mathematical Logic«, str. 246—270; Ackermann: »Solvable Cases of the Decision Problem«.

[2] gl. Kleene: »Introduction to Metamathematics«, str. 298—316.

[3] Gödel: »On Formally Undecidable Sentences of PM and Related Systems«.

[4] Tarski, Mostowski & Robinson: »Undecidable Theories«

sistemov Gödel in da gre tudi tukaj za eno izmed variant njegovega znamenitega dokaza.

Jezik splošne logike (= funkcijskega ali predikativnega računa prve in višjih stopenj), ki vsebuje poleg izrazov primarne logike še: individualne konstante in variable, funkcijske konstante in variable (prve in višjih stopenj) ter individualne in funkcijske kvantifikatorje (prve in višjih stopenj), bomo imenovali jezik **F**. Pravila formacije in transformacije tega jezika določajo njegove »pravilno formulirane formule« (kratko PFF), ki jih bomo označili s simboli $\mathscr{F}_A, \mathscr{F}_B, \mathscr{F}_C, \ldots \mathscr{F}_L, \mathscr{F}_M, \mathscr{F}_N, \ldots$, torej z velikimi črkami kot indeksi, katerih pomen bomo videli pozneje.

Deduktivni sistem **T** znotraj jezika **F** pa postavimo s sledečimi aksiomi, ki jih bomo zaradi enostavnosti napisali kot pravila izpeljave:[5]

$\mathscr{T}_1$: $P \supset Q, P/Q$
$\mathscr{T}_2$: $*/P \supset (Q \supset P)$
$\mathscr{T}_3$: $*/(P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R))$ $\qquad * =$ znak za: »poljubna *PFF*«
$\mathscr{T}_4$: $*/(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$
$\mathscr{T}_5$: $*/(\forall x) Fx \supset Fy$ $\qquad (\forall) =$ univerzalni kvantifikator
$\mathscr{T}_6$: $P \supset Fx/P \supset (\forall x) Fx$, če x ne nastopa kot prosta variabla v P.

Temu setu aksiomov oz. pravil izpeljave, ki je simplificirana verzija sistema splošne logike v Fregejevem delu »Begriffschrift«, pa pri formaciji sistema **T** dodamo še Peanove aksiome, ki utemeljujejo aritmetiko naravnih števil. Peanovih aksiomov je pet, vendar pa prva dva, namreč:

$\mathscr{P}_1$: 1 je število.
$\mathscr{P}_2$: Naslednik vsakega števila je število.

izpustimo, ker lahko v okviru splošne logike naravna števila uvedemo kot indekse eksistencialnih stavkov (gl. spodaj), tako da sta tezi $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$ v sistemu **T** kot aksioma odvečna. Ostanejo tretji, četrti in peti Peanov aksiom, ki se v originalnem zapisu glasijo takole:[6]

$\mathscr{P}_3$: Ni res, da bi imeli dve različni (naravni) števili istega naslednika.
$\mathscr{P}_4$: 1 ni naslednik nobenemu (naravnemu) številu.
$\mathscr{P}_5$: Vsaka lastnost, ki pripada številu 1, obenem pa tudi nasledniku vsakega (naravnega) števila, ki mu ta lastnost pripada, pripada vsem (naravnim) številom.

Te tri aksiome, ki skupaj s $\mathscr{T}_1$—$\mathscr{T}_6$ tvorijo sistem **T**, bomo zapisali v sledečem formalnem zapisu:

$\mathscr{T}_7^{Pe}$; $\mathrm{Nas}(x) = \mathrm{Nas}(y) \supset x = y$

$\mathscr{T}_8^{Pe}$: $\sim (\mathrm{Nas}(x) = 1)$

$\mathscr{T}_9^{Pe}$: $\mathrm{Las}(1) \& (\forall x)(\mathrm{Las}(x) \supset \mathrm{Las}(\mathrm{Nas}(x))) \supset (\forall x)\, \mathrm{Las}(x)$

---

[5] gl. Kneale, ibid., str. 701—702.
[6] Peano: »Arithmetices principa nova methodo exposita«, 1889.

Izrazi pomenijo: x, y, ... = (naravna)[7] števila, $\mathrm{Nas}(x)$ = naslednik števila x, $\mathrm{Las}(x)$ = lastnost števila x, & = logična konjukcija.

Na prvi pogled se zdi, da s tako »razširitvijo« aksiomov Fregejevega sistema izstopimo iz območja jezika **F** (splošne logike) v območje matematike oz. aritmetike, toda to ne drži, kajti vsa na videz izven-logična (= matematična) izrazna sredstva, ki nastopajo v $\mathcal{T}_7^{Pe}-\mathcal{T}_9^{Pe}$, lahko v »klasični« logiki (Frege, Russell itd.) definiramo z njenimi lastnimi izraznimi sredstvi:

(a) Relacijo identitete »=« Rusell & Whitehead v »Principia Mathematica« uvedeta s pomočjo predikativnih funkcij $F!$ na sledeči način:[8]

$$x = y^{Def} \equiv (\forall F)(F!(x) \equiv F!(y))$$

V jeziku aristotelovske ontologije bi to definicijo identitete lahko izrazili takole: »Dve substanci sta identični takrat, kadar so vsi njuni atributi isti.« Problem identitete torej prevedemo na problem istovetnosti atributov oz. lastnosti, ki pa so v Russellovi splošni logiki poleg individuumov glavna zvrst *logičnih* tipov. Z uvedbo identitete torej ne izstopamo iz jezika **F** (splošne logike).

(b) Prav tako ne izstopamo iz jezika **F**, če uporabljamo pojem števila, kajti števila lahko s sredstvi **F** definiramo kot indekse v sledečih formulah:[9]

$$(\exists_1 x)Fx^{Def} \equiv (\exists x)(Fx \& (\forall y)(Fy \supset x = y)),$$

$$(\exists_2 x)Fx^{Def} \equiv (\exists x)(\exists y)(Fx \& Fy \& \sim (x = y) \& (\forall z)(Fz \supset x = z \vee y = z)),$$

$$(\exists_3 x)Fx \ldots$$

.

.

. etc.

Te formule lahko beremo takole:

»Točno *ena* stvar je, ki ima lastnost F.«
»Točno *dve* stvari sta, ki imata lastnost F.« etc.

(c) Tudi izrazi $\mathrm{Nas}(\cdot)$ in $\mathrm{Las}(\cdot)$ so *PFF* jezika **F**, saj so to predikati logičnega tipa > 1. Če so njihovi argumenti $x, y, z, \ldots$ logičnega tipa $= 1$, potem je izraz $\mathrm{Nas}(\cdot)$ tipa $= 2$, $\mathrm{Las}(\cdot)$ pa je v formuli $\mathrm{Las}(\mathrm{Nas}(x))$ izraz tipa $= 3$, etc.

Če torej pri formaciji deduktivnega sistema **T** aksiomom splošne logike dodamo Peanove aksiome aritmetike naravnih števil, ne prestopimo jezikovnih okvirov **F**, tako da je množica formul, ki tvorijo **T**, prava podmnožica *PFF* jezika **F**. Jezik **F** torej obsega jezik Peanove aritmetike, kar pomeni, da lahko v njem izrazimo tudi vse formule in teoreme aritmetike (naravnih) števil. Ta ugotovitev se sklada tudi s programom »Principia mathematica«, ki skuša matematične zakonitosti deducirati iz logike.

---

[7] Odslej bom izpuščal oznako »naravna« števila, ker gre v nadaljevanju teksta vseskozi za naravna števila: 1, 2, 3, ...
[8] prim. Kneale, ibid., str. 618
[9] gl. Kneale, ibid., str. 712.

Velja pa tudi obratno, kakor je prvi pokazal Gödel: vse izraze (ne samo teoreme sistema **T**) jezika **F**, tj. *vse PFF* ($\mathscr{F}_A, \mathscr{F}_B, \mathscr{F}_C, \dots \mathscr{F}_L, \mathscr{F}_M, \mathscr{F}_N, \dots$)[10] *jezika* **F** *lahko enoznačno »prevedemo« v števila* $A, B, C, \dots L, M, N, \dots$. »Aritmetizacija« jezika **F** poteka na sledeči način:

$$\begin{array}{c} \text{izrazi} \\ \text{jezika} \\ \mathsf{F} \end{array} \left\{ \begin{array}{lcr} 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 1 \\ \mathrm{Nas}(\cdot) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 3 \\ \sim & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 5 \\ \vee & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 7 \\ (\forall\cdot) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 9 \\ (& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 11 \\ ) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 13 \end{array} \right\} \text{števila}$$

Variablam logičnega tipa n priredimo števila oblike p^n, pri čemer je p praštevilo večje od 13, npr.: x (kot variablo prvega tipa) označimo s 17, X (kot variablo drugega tipa) označimo s 17^2; y (kot variablo prvega tipa) označimo z 19, Y (kot variablo drugega tipa) označimo z 19^2 etc.

Nadaljujejo s »prevajanjem« formul jezika **F** v števila: če so $s_1, s_2, s_3, \dots s_k$ števila, s katerimi označimo posamezne simbole formule $\mathscr{F}_K$, potem označimo celotno formulo $\mathscr{F}_K$ s številom:

$$K = 2^{s_1} \cdot 3^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$$

pri čemer je p_k k-to (po vrsti) praštevilo in vmesne pike pomenijo aritmetični produkt.

Poseben primer takega prevoda formule $\mathscr{F}_K$ v število K bi bil sledeč:

$$\mathscr{F}_K\colon\ (\forall x)(X(x) \vee \sim X(x))$$

če upoštevamo, da vezano variablo »prevedemo« vedno pred kvantifikatorjem, ki jo veže, dobimo:

$$K = 2^{17} \cdot 3^{9} \cdot 5^{11} \cdot 7^{17^2} \cdot 11^{11} \cdot 13^{17} \cdot 17^{13} \cdot 19^{7} \cdot 23^{5} \cdot 29^{17^2} \cdot 31^{11} \cdot 37^{17} \cdot 41^{13} \cdot 43^{13}$$

Kolikor ima $\mathscr{F}_K$ ločenih primitivnih znakov (v našem primeru $k = 14$), toliko ima njegov »prevod« v število K različnih praštevil (*prafaktorjev*).

Aritmetiziramo (»prevedemo« v število) pa lahko tudi cele sekvence formul jezika **F**, namreč sekvence kakor so: $\mathscr{F}_A, \mathscr{F}_B, \mathscr{F}_C, \dots, \mathscr{F}_M$. (Na primer celoten potek dokaza nekega teorema, izraženega z jezikovnimi sredstvi **F**; celoten algoritem etc.) To dosežemo na sledeči način: če so $A, B, C, \dots, M$. števila, ki so »prevodi« posameznih formul $\mathscr{F}_A, \mathscr{F}_B, \mathscr{F}_C, \dots, \mathscr{F}_M$, potem je »prevod« cele sekvence število:

$$2^A \cdot 3^B \cdot 5^C \cdot \ldots \cdot p_m^M .$$

Gödelova metoda »prevajanja« splošne logike v števila povezuje eno in eno samo število z vsakim izrazom, formulo ali sekvenco formul jezika **F**, in sicer tako, da je (tudi obratno) mogoče za vsako število najti odgovarjajoči izraz (formulo, sekvenco formul) jezika **F**. To reverzibilnost omogoča dobro znani aritmetični teorem, ki pravi, da vsako (naravno) število lahko *le na en način* razstavimo v njegove pra-

---

[10] Tudi vse (v jeziku F) ne-*PFF*, ki nastanejo z napačno povezavo primitivnih simbolov, npr. F& ∨ G, lahko prevedemo v Gödelova števila, vendar ti izrazi za naš kontekst niso relevantni.

faktorje (= praštevila). *Aritmetika*, ki obravnava relacije med števili, tako *postane sintaksa oz. meta-jezik jezika* **F** (*funkcijskega računa, splošne logike*).

Preden preidemo k samemu dokazu principielne neodločljivosti jezika **F**, pa moramo spoznati še t. i. »*diagonalno funkcijo*«.

Za tiste funkcije splošne logike, ki imajo eno samo prosto variablo x, imenujmo jih $\mathscr{F}^{\bullet}_{A}, \mathscr{F}^{\bullet}_{B}, \mathscr{F}^{\bullet}_{C}, \ldots, \mathscr{F}^{\bullet}_{N}, \ldots$, lahko rečemo, da izražajo lastnosti števil. Za vsako (naravno) število lahko vprašamo, ali »izpolnjuje« (angl.: satisfies) lastnosti, ki jih določajo $\mathscr{F}^{\bullet}_{A}, \mathscr{F}^{\bullet}_{B}, \mathscr{F}^{\bullet}_{C}, \ldots, \mathscr{F}^{\bullet}_{N}, \ldots$, ali ne, zlasti pa je v našem kontekstu zanimivo to vprašati za tista števila $A, B, C, \ldots, N, \ldots$, ki so »prevodi« funkcij $\mathscr{F}^{\bullet}_{A}, \mathscr{F}^{\bullet}_{B}, \mathscr{F}^{\bullet}_{C}, \ldots, \mathscr{F}^{\bullet}_{N}, \ldots$ v aritmetizirani sintaksi.

Če pišemo $[\mathscr{F}^{\bullet}_{N}; M]$ za »število M izpolnjuje funkcijo $\mathscr{F}^{\bullet}_{N}$«, dobimo sledečo matrico:

$$
\begin{array}{cccccc}
\underline{[\mathscr{F}^{\bullet}_{A}; A]} & [\mathscr{F}^{\bullet}_{A}; B] & [\mathscr{F}^{\bullet}_{A}; C] & \ldots & [\mathscr{F}^{\bullet}_{A}; N] & \ldots \\
[\mathscr{F}^{\bullet}_{B}; A] & \underline{[\mathscr{F}^{\bullet}_{B}; B]} & [\mathscr{F}^{\bullet}_{B}; C] & \ldots & [\mathscr{F}^{\bullet}_{B}; N] & \ldots \\
[\mathscr{F}^{\bullet}_{C}; A] & [\mathscr{F}^{\bullet}_{C}; B] & \underline{[\mathscr{F}^{\bullet}_{C}; C]} & \ldots & [\mathscr{F}^{\bullet}_{C}; N] & \ldots \\
[\mathscr{F}^{\bullet}_{N}; A] & [\mathscr{F}^{\bullet}_{N}; B] & [\mathscr{F}^{\bullet}_{N}; C] & \ldots & \underline{[\mathscr{F}^{\bullet}_{N}; N]} & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \quad \mathrm{Diag}
\end{array}
$$

Def. *Diagonalna funkcija* je takšna funkcija (preslikava), ki funkcije $\mathscr{F}^{\bullet}_{A}, \mathscr{F}^{\bullet}_{B}, \mathscr{F}^{\bullet}_{C}, \ldots, \mathscr{F}^{\bullet}_{N}, \ldots$(tj. *PFF* jezika **F** z eno samo prosto variablo x, katerim so prirejena (zaporedoma) števila $A, B, C, \ldots, N, \ldots$) preslika v tiste formule, ki jih dobimo, če vstavimo (zaporedoma) števila $A, B, C, \ldots, N, \ldots$ v funkcije $\mathscr{F}^{\bullet}_{A}, \mathscr{F}^{\bullet}_{B}, \mathscr{F}^{\bullet}_{C}, \ldots, \mathscr{F}^{\bullet}_{N}, \ldots$ povsod tam, kjer v teh funkcijah nastopa prosta variabla x.

Če skušamo zaradi večje preglednosti zgornjo definicijo nekoliko poenostaviti s tem, da pišemo znak *'N'* kot »shemo spremenljivke« (tj. da N pomeni poljubno število v domeni $A, B, C, \ldots, N, \ldots$), dobimo analogno definicijo diagonalne funkcije:

Def.' Diagonalna funkcija je takšna funkcija (preslikava), ki funkcijo $\mathscr{F}^{\bullet}_{N}$ (tj. *PFF* jezika **F** z eno samo prosto variablo x, kateri je prirejeno število N) preslika v tisto formulo, ki jo dobimo, če vstavimo število N v funkcijo $\mathscr{F}^{\bullet}_{N}$ povsod tam, kjer v $\mathscr{F}^{\bullet}_{N}$ nastopa prosta variabla x.

To novo formulo imenujemo $\mathscr{F}^{\bullet}_{\mathrm{Diag}(N)}$, njej prirejeno število v aritmetizirani sintaksi pa Diag(N). Shematično:

$$
\mathrm{Diag} \quad \begin{array}{l} \mathscr{F}^{\bullet}_{N} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \text{prirejeno število: } N \\ \mathscr{F}^{\bullet}_{\mathrm{Diag}(N)} \ \ldots\ldots \ \text{prirejeno število: } \mathrm{Diag}(N) \end{array} \quad \mathrm{Diag}
$$

Formula $\mathscr{F}^{\bullet}_{\mathrm{Diag}(N)}$ ima pri določenem N status konstante, če pa je N »shema spremenljivke«, potem lahko za $\mathscr{F}^{\bullet}_{\mathrm{Diag}(N)}$ rečemo, da je »shema konstante«. $\mathscr{F}^{\bullet}_{\mathrm{Diag}(N)}$ ni več formula v pravem pomenu besede, ampak stavek (ki je bodisi resničen bodisi neresničen), ki nastane z neko specifično »podelitvijo pomena« *PFF*-m jezika **F** z eno prosto variablo x. Ker jezik **F** vključuje tudi individualne in funkcijske konstante, je tudi $\mathscr{F}^{\bullet}_{Diag(N)}$ *PFF* jezika **F**, hkrati pa je diagonalna funkcija legitimna transformacija znotraj jezika **F**, ker njene funkcijske vrednosti ne segajo izven njegovega območja.

Za diagonalno funkcijo je značilno sámo-nanašanje, ki postane intuitivno razvidno v sledeči definiciji:

Def.'' Diagonalna funkcija je preslikava (transformacija) funkcije $\mathscr{F}^{\bullet}_{N}$ v konstanto $\mathscr{F}^{\bullet}_{Diag(N)}$ tako, da se funkcija $\mathscr{F}^{\bullet}_{N}$ »dopolni« s svojim lastnim imenom.

Na prvi pogled se zdi, da je takšna transformacija »circulus vitiosus«, vendar pa to ni tako, kajti $\mathscr{F}^{\bullet}_{N}$ *ne* določa *sebe* s svojim lastnim imenom, ampak *drugo* formulo, namreč izraz $\mathscr{F}^{\bullet}_{Diag(N)}$.

Zdaj ko smo pregledali ves potreben »instrumentarij« za formulacijo dokaza principielne neodločljivosti jezika **F** (= jezika splošne logike, funkcijskega računa), pa preidimo na dokaz sam. Ideja tega dokaza je preprosta: treba je konstruirati vsaj en principielno neodločljiv stavek oz. formulo, ki je hkrati *PFF* jezika **F**. Ker pa so logični *paradoksi* principielno neodločljivi stavki, je treba v jeziku **F** poiskati oz. konstruirati vsaj en logični paradoks.

To je ena dimenzija (veja) dokaza, ki sledi spodaj; obenem pa je ta dokaz apagogičen: predpostavimo, da so vse *PFF* jezika **F** odločljive in pokažemo, da to vodi v protislovje. Zaradi večje preglednosti bom dokaz napisal v ločenih, oštevilčenih členih:

(1) Med *PFF* jezika **F**, ki smo jih poimenovali $\mathscr{F}_A, \mathscr{F}_B, \mathscr{F}_C, \ldots, \mathscr{F}_L, \mathscr{F}_M, \mathscr{F}_N, \ldots$, lahko izberemo samo tiste, ki so (logično) *resnične*. Te tvorijo podmnožico *PFF* jezika **F**. To podmnožico označimo s (hipotetično) funkcijo $\mathbf{R}(x)$, pri čemer je x spremenljivka, ki jo interpretiramo kot spremenljivko za (naravno) število, »ime« formule tipa $\mathscr{F}_x$ $(x = A, B, C, \ldots, L, M, N, \ldots)$, »funkcijska vrednost« $\mathbf{R}(x)$ pa je $= 1$, kar pomeni (logično) resničen stavek. $\mathbf{R}(x)$ je torej funkcija, ki opredeljuje domeno tistih x, ki so »imena« (logično) resničnih stavkov.

(2) Vprašanje odločljivosti *PFF* jezika **F** zdaj lahko formuliramo kot vprašanje, če lahko za poljubno (naravno) število N *s končnim algoritmom* ugotovimo, ali »izpolnjuje« lastnost, ki jo določa funkcija $\mathbf{R}(x)$ ali ne.

(3) Predpostavimo, da tak algoritem obstaja. To bi pomenilo, da lahko vrednost *numerične* funkcije $\mathbf{R}(x)$ za poljubni N izračunamo v končnem postopku.

(4) Takšne funkcije naravnih števil, katerih vrednosti za poljubni N lahko izračunamo v končnem postopku, pa lahko formuliramo s pojmi Peanove aritmetike[11], za katere smo zgoraj pokazali, da jih lahko izrazimo v jeziku **F**, torej kot *PFF* splošne logike. Iz tega (po zakonu tranzitivnosti) sledi, da je tudi $\mathbf{R}(x)$ *PFF* jezika **F**.

---

[11] Za popolno eksaktnost dokaza bi bilo potrebno uvesti pojem »rekurzivne funkcije«, ki pa ga zaradi večje preglednosti izpuščamo. Church je dokazal (1936), da je vsaka efektivno izračunljiva funkcija (funkcija s končnim algoritmom) rekurzivna (gl. Kneale, ibid. 733). Rekurz. funkcije pa lahko izrazimo s Peanovo aritmetiko.

(5) Če pa je $\mathbf{R}(x)$ *PFF* jezika $\mathbf{F}$, potem je tudi formula:

$$\sim \mathbf{R}(\mathrm{Diag}(x))$$

PFF jezika $\mathbf{F}$, saj jo iz $\mathbf{R}(x)$ dobimo z negacijo, diagonalno funkcijo in substitucijo, ki so v jeziku $\mathbf{F}$ legitimne transformacije.

(6) Formulo $\sim \mathbf{R}(\mathrm{Diag}(x))$ imenujmo $\mathscr{F}^{\bullet}_{N}$ (saj je *PFF* jezika $\mathbf{F}$ z eno samo prosto variablo x):

$$\mathscr{F}^{\bullet}_{N} = \sim \mathbf{R}(\mathrm{Diag}(x)).$$

(7) Še enkrat izvedemo diagonalno funkcijo in dobimo:

$$\mathscr{F}^{\bullet}_{\mathrm{Diag}(N)} = \sim \mathbf{R}(\mathrm{Diag}(N)).$$

(8) Celotno formulo v vrstici (7) imenujemo $\mathscr{L}$ in zanjo ugotovimo, da je varianta semantičnega paradoksa »Lažem.«, kajti $\mathscr{L}$ pravi sama zase, da ni (logično) resnična, pravi namreč, da ni (logično) resničen (ali $\sim \mathbf{R}$) prav njen lastni »prevod« v število $\mathrm{Diag}(N)$.

(9) Ker je formula $\mathscr{L}$ *PFF jezika* $\mathbf{F}$ in ima obenem značaj paradoksa (je *principielno neodločljiva*), smo z njo našli vsaj eno v tem jeziku principielno neodločljivo formulo, kar z drugimi besedami pomeni, da v jeziku $\mathbf{F}$ ni univerzalnega končnega odločitvenega algoritma oz. da *splošna logika (funkcijski račun) ni univerzalno odločljiva. Q.E.D.*

(9a) In še apagogična veja dokaza: v (3) smo predpostavili, da obstaja končen algoritem, s katerim lahko odločimo o (logični) resničnosti oz. neresničnosti katerekoli *PFF* jezika $\mathbf{F}$. Ta predpostavka nas vodi v paradoks (7), ki omogoča formuliranje protislovja.

(i) $\mathscr{L} \supset \sim \mathscr{L}$
(ii) $\sim \mathscr{L} \supset \mathscr{L}$ paradoks, gl. (7)—(8);

po definiciji ekvivalence lahko zapišemo (i) + (ii):

(iii) $\mathscr{L} \equiv \sim \mathscr{L}$, kar je protislovje.

Na osnovi zakona o izključeni tretji možnosti je s tem dokazana nasprotna trditev: ni končnega algoritma za odločitev vseh *PFF* jezika $\mathbf{F}$. *Q.E.D.*

Znameniti Russellov paradoks »razreda, ki vsebuje sam sebe···« je odigral važno vlogo pri ugotavljanju nekonsistentnosti formalnih sistemov (Cantorjevega, Fregejevega). Opozoriti velja, da gre v našem primeru paradoksa $\mathscr{L}$ za nekaj drugega: paradoks $\mathscr{L}$ ne postavlja pod vprašaj *konsistentnosti* splošne logike (funkcijskega računa), kajti formula $\mathscr{L}$ *ni* teorem splošne logike, ne izhaja iz njenih aksiomov, temveč je samo produkt formacijskih pravil njenega jezika. Paradoks $\mathscr{L}$, ki je hkrati *PFF* jezika $\mathbf{F}$, dokazuje *neodločljivost* tega jezika (splošne logike).

Vsak jezik (tako tudi jezik $\mathbf{F}$), ki je sintaktično tako bogat, da je v njem mogoče formulirati aritmetiko naravnih števil (Peanovo aritmetiko), je principielno neodločljiv, ker v njem lahko formuliramo tudi semantične paradoksa tipa $\mathscr{L}$, tj. principielno neodločljive stavke. Ta trditev je drugače povedana znamenita Gödelova teza, da je formalna aritmetika principielno neodločljiv sistem.

Možnost formuliranja semantičnih paradoksov tipa $\mathscr{L}$ pa je dana s tem, da jezik formulizirane aritmetike naravnih števil (ki je delni jezik jezika **F**) lahko nastopa kot meta-jezik jezika **F**: vsak izraz jezika **F** lahko namreč »prevedemo« v Gödelova števila (tj. naravna števila, produkte praštevil). Aritmetične funkcije, katerih argumenti so naravna števila, s tem postanejo meta-teoremi jezika **F**. Vidimo torej, da gre tu za sámo-nanašanje, za *zabris ločnice med jezikom in meta-jezikom* — iz tega zabrisa nastajajo semantični paradoksi (kakor je ugotovil že Tarski). V našem primeru ima paradoks $\mathscr{L}$ delno tudi »konstruktiven« pomen, saj z njim lahko dokažemo »pozitivno« tezo, da je splošna logika (funkcijski račun kot celota) neodločljiva.

Church je dokazal, da niti ves funkcijski račun prve stopnje z identiteto ni odločljiv[12]. Odločljiv pa ni zato, ker lahko v njem formuliramo Peanovo aritmetiko.[13]

Nekoliko presenetljivo pa je, da je funkcijski račun prve stopnje z identiteto semantično popoln (dokazal Gödel); to pomeni, da je vsaka njegova logično resnična formula hkrati tudi logično veljavna (teorem), ali z drugimi besedami, da lahko iz aksiomov funkcijskega računa prve stopnje z identiteto izpeljemo vse njegove resnične stavke. Ta postopek pa je ireverzibilen: ne obstaja univerzalen postopek, ki bi odločil v primeru vsake konkretne *PFF* funkcijskega računa (tako prve stopnje z identiteto kot višjih stopenj), ali je logično resnična ali ne. Ta *»nesimetričnost« funkcijskega računa* je dokaj nenavadna: od aksiomov lahko (v okviru prve stopnje z identiteto) pridemo do vsakega logično resničnega stavka, medtem ko ni mogoče od vsakega stavka (*PFF*) z redukcijo priti nazaj k aksiomom.

Princip neodločljivosti, ki velja za jezik **F**, pa velja tudi za *naravni jezik*, ki je univerzalni meta-jezik vseh formaliziranih jezikov, torej tudi aritmetike naravnih števil. Te teze ni potrebno posebej dokazovati, če pomislimo, da v naravnem jeziku lahko brez težav sintaktično pravilno formuliramo semantični paradoks »Lažem.«, ki je eden izmed mnogih principelno neodločljivih stavkov naravnega jezika. Če bi bil naravni jezik, v katerega je vtkana vsa dejanskost, odločljiv z nekim univerzalnim logičnim postopkom, potem bi bila »znanost logike« edina znanost. Lažnivec torej rešuje empirijo pred gospostvom logike in materijo pred gospostvom duha.

---

[12] prim. Berka-Mleziva: »Kaj je logika«, str. 155.

[13] Identiteto (kot primitivni pojem Peanove aritmetike) $x = y$ lahko uvedemo v logični sistem na dva načina: a) tako da jo uvedemo kot nov oz. dodaten primitivni pojem k funkcijskemu računu 1. stopnje: dobimo funkcijski račun prve stopnje z identiteto; 2) tako kot smo jo uvedli zgoraj (sledeč Russelu & Whiteheadu): da izhajamo iz funkcijskega računa stopnje večje od 1 in identiteto definiramo s pomočjo predikativnih funkcij, ki jih veže kvantifikator stopnje večje od 1 (tj. funkcijski kvantifikator).

UDK 164.05:165.412.3

MARKO URŠIČ

LOGIČNA ODLOČLJIVOST IN PROBLEM LAŽNIVCA

Če bi bil vsak stavek naravnega jezika logično odločljiv (glede njegove resničnosti oz. neresničnosti) z nekim univerzalnim logičnim algoritmom, torej analitičen, potem bi bila ‚znanost logike' edina Znanost. Vemo pa, da je v naravnem jeziku možno smiselno formulirati empirične sodbe, ki so sintetične. Poleg tega pa je naravni jezik principielno neodločljiv, ne glede na apriornost ali aposteriornost v tem jeziku izraženih sodb, in sicer zato, ker v njem lahko smiselno formuliramo semantične paradokse tipa ‚Lažnivec': taki paradoksi so principielno neodločljivi stavki, ker iz njihove resničnosti sledi neresničnost in obratno.

Hypothesis: Če nam uspe v okviru funkcijskega računa (‚splošne' logike) izraziti kak semantični paradoks kot pravilno formulirano formulo, ki jo dopuščajo pravila formacije jezika F (funkcijskega računa), potem iz tega sledi, da je funkcijski račun kot celota principielno neodločljiv. Argumentum: Dokaz je varianta Gödelovega dokaza neodločljivosti formalne aritmetike. Formalna aritmetika in (logični) funkcijski račun imata namreč to lastnost, da nastopata drug drugemu v vlogi meta-jezika. Ta refleksivnost jezika F omogoča tvorjenje sámo-nanašajočih se izrazov, med drugim tudi semantičnega paradoksa tipa 'Lažnivec'. Q.E.D.

UDC 164.05:165.412.3

MARKO URŠIČ

LOGICAL DECIDABILITY AND THE 'LIAR' PARADOX

If every proposition of the ordinary language were decidable, if its truth or falsity could be determined with some universal logical algoritm, then 'science of logic' would be the only Science. But in the ordinary language we can express many empirical propositions, which are of course not analytical. Beside this fact, the ordinary language is undecidable in principle, because with the expressions of this language we can sensibly formulate semantical paradoxes of the 'Liar' type: these paradoxes are propositions which are not decidable in principle, because from their truth we can deduce their falsity and vice versa.

Hypothesis: If we succeed inside the functional calculus ('general' logic to express some semantical paradox as a well-formed-formula which would be permitted by the formation rules of the language F (functional calculus as a whole was undecidable. Argumentum: Our argument is a variant of the Gödel's proof of the undecidability of the formal arithmetics. The formal arithmetics and the (logical) functional calculus have namely the property that they can serve as meta-languages o each other. This reflexiveness of the language F enables the forming of silf-referential exepressions, among them also the semantical paradox of the 'Liar' type. Q.E.D.

UDK 330.1:330.85

NEKATERI SOCIOFILOZOFSKI POGLEDI NA MARXOVO KRITIKO POLITIČNE EKONOMIJE

BOGOMIR KOVAČ

V Marxovi politični ekonomiji je analitično-sintetično pojmovanje ekonomskega razumeti kot kompleksno prepletanje ekonomskih, filozofskih in širše socioloških elementov, ki postavljajo politično ekonomijo v nove definicijske okvire. Specifičnost Marxove paradigme je najbolje vidna v metodi kritike politične ekonomije, kjer razlikujemo dve ravni preučevanja: abstraktnoteoretično in konkretnozgodovinsko.

Povezovanje filozofske in eknonomske ravni analize omogoča na eni strani rekonstrukcijo politične ekonomije (dialektičen način raziskovanja in razlage), na drugi strani pa ima kritika